

Ecole Polytechnique d'Architecture et d'Urbanisme

LABORATOIRE : VILLE - ARCHITECTURE et PATRIMOINE



**MEMOIRE ELABORE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN
ARCHITECTURE.
OPTION : PATRIMOINE.**

Intitulé :

L'architecture d'Oscar Niemeyer par la géométrie non euclidienne.

Cas d'étude : L'université des frères Mentouri Constantine 1.

NOM /PRENOM DU CANDIDAT(E) :

Mlle. BENYEZZAR Hadjer

COMPOSITION DU JURY :

Pr. DJEBRI Boualem (Président) LVAP
Dr. CHERFAOUI Dounia (VUDD)(Membre)
Mme BELHAI Atika (Membre)

NOM /PRENOM de L'ENCADREUR :

Prof. Dr CHENNAOUI Youcef

Promotion : Mars 2019.

Remerciements :

L'élaboration de ce modeste travail a été sans nul doute grâce à dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et le courage nécessaire.

اللهم لك الحمد حتى ترضى ولك الحمد إذا رضيت ولك الحمد بعد الرضا

Je tiens à remercier tout particulièrement le Pr. Chennaoui, qui, sans lui je ne serai pas là aujourd'hui, je le remercie pour son aide si précieuse, pour ses conseils, pour ses orientations, pour ses encouragements mais surtout pour sa patience. Je souhaiterais exprimer ma profonde gratitude envers lui.

Je remercie également les membres du jury, qui m'ont honorée en acceptant d'évaluer mon modeste travail, j'accueillerai avec grand intérêt les remarques ainsi que les critiques, qui contribueront à améliorer mon travail et à l'enrichir d'avantage.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude, à mon oncle et à ma tante Mr et Mme Touam, enseignants au département d'architecture de Constantine, ainsi qu'à Mr Boudemagh Architecte à Constantine pour leur aide, pour toute la documentation, et pour tous leurs efforts.

Il est nécessaire de remercier, tous les membres de ma famille, pour leur soutien sans faille, pour leur encouragement, et pour toujours croire en moi, et pour m'encourager à toujours aller de l'avant, et auxquels je tiens à exprimer par la même occasion ma profonde reconnaissance.

Enfin, je remercie mes amis, qui m'ont soutenue et qui m'ont encouragée, ainsi que toute autre personne qui de près ou de loin à aider à l'élaboration de cette modeste recherche.

Dédicace :

A la raison de mon existence, les prunelles de mes yeux, mes chers parents, qui ont toujours su me redonner la force quand je ne l'avais plus, veuillez trouver en ce modeste travail un hommage que je vous rends, qui sans nul doute n'égalera tous vos sacrifices. Que dieu vous garde pour nous.

A mon unique frère, le pilier sur lequel je peux me reposer en toute confiance, que dieu illumine ton chemin.

A mes deux sœurs, mes deux confidentes, qui ont toujours les mots pour me rendre le sourire et pour me remonter le moral quand ça ne va pas, que dieu vous guide et vous accompagne dans les chemins que vous entreprendrez.

A ma ville Constantine ...

Résumé :

Oscar Niemeyer est l'un des pionniers de l'architecture du style international, ce style qui tentait de supprimer toute forme de ségrégation social, essayant de créer une architecture transportable d'un pays à un autre sans prendre en considération les frontières et la culture, traitant de généraliser l'architecture, ce qui n'a pas été longtemps apprécié. Néanmoins Niemeyer s'est démarqué des autres architectes à travers son penchant pour la métaphore et la symbolique, puisant son inspiration de ce qui l'entoure, de la nature, ainsi que de l'architecture de son pays, ce qui le rendait plus ou moins baroque ceci se manifestait dans les formes qu'il dessinait.

Toutefois, ses projets restent uniques, il ne les reproduisait pas souvent, il privilégiait le site, l'histoire de chacune de ses conceptions, il était dans une recherche constante de l'esthétique, pour ce faire il privilégiait un matériau qui l'aidera à concrétiser ses idées à savoir le béton armé. Comptant sur les progrès ainsi que sur l'ingéniosité de ses confrères les ingénieurs, certain de leur capacité à innover dans ce domaine. Par ailleurs, il a eu recours à la géométrie non euclidienne, pour un grand nombre de ses projets, en privilégiant la courbe et la grande portée.

C'est dans cette optique que va s'inscrire notre recherche qui, à travers l'étude de l'université des Frères Mentouri -Constantine 1-, va lever le voile sur la géométrie utilisée par l'architecte. Ce projet que Niemeyer considère et qualifie, comme étant le plus abouti en Algérie et dans le monde, ce fut le premier qu'il aura réalisé en Algérie en 1969, pensé d'une manière nouvelle s'appuyant sur la sociologie et cherchant à concevoir l'université du futur.

Celle-ci, contrairement au programme initial, contient un petit nombre de bâtiments, rassemblant les deux types de géométrie à savoir « la géométrie euclidienne » et « la géométrie non euclidienne », la particularité de cette dernière se trouve dans le 5ème postulat d'Euclide où la somme des angles d'un triangle est soit supérieure à 180° ou au contraire inférieure à celle-ci.

Mots clés : Oscar Niemeyer, Style international, Géométrie non-euclidienne, Université des frères Mentouri Constantine 1.

Abstract :

Oscar Niemeyer is one of the pioneers of international style architecture, the one tried to suppress all forms of social segregation, trying to create a transportable architecture from one country to another without taking into consideration borders and culture, dealing with generalizing architecture, which was not long appreciated. Nevertheless Niemeyer distinguished himself from other architects through his penchant for metaphor and symbolism, drawing inspiration from his surroundings, nature, and the architecture of his country, which made him more or less baroque through the forms he drew.

However, his projects remain unique, he does not reproduce them often, he favors the site, the history of each of his designs, he was in a constant search for aesthetics, to do this he favored a material that will help him to concretize his ideas to know the reinforced concrete. Counting on the progress as well as the ingenuity of his colleagues the engineers, certain of their capacity to innovate in this field. In addition, he used non-Euclidean geometry for a large number of his projects, favoring the curve and the wide range.

It is in this perspective that will be our research, which, through the study of the Mentouri Brothers -Constantine 1-, will lift the veil on the geometry used by the architect. This project that Niemeyer considers and qualifies as the most successful in Algeria and in the world, it was the first he made in Algeria in 1969, thinking in a new way based on sociology and seeking to design the university of the future.

This, unlike the initial program, contains a small number of buildings, bringing together the two types of geometry namely "Euclidean geometry" and "non-Euclidean geometry", the particularity of which is found in the 5th postulate of Euclid or the sum of the angles of a triangle is either greater than 180° or less than this.

Keywords: Oscar Niemeyer, International Style, Non-Euclidean Geometry, University of the Mentouri Constantine Brothers 1.

ملخص:

أوسكار نيماير هو واحد من رواد العمارة ذات الطراز الدولي، هذا النمط حاول القضاء على جميع أشكال التمييز الاجتماعي، سعى الى خلق هندسة معمارية متنقلة من بلد إلى آخر دون الاخذ بعين الاعتبار الحدود والثقافة، وعمل على تعميمها، هذا ما لم يكن موضع تقدير لوقت طويل. ومع ذلك، فقد تميز نيماير عن غيره من المهندسين المعماريين من خلال ميله إلى الاستعارة والرمزية، مستلهماً بما يحيط به من الطبيعة، فضلاً عن الهندسة المعمارية لبلده، مما جعلها تميل تقريباً نحو الباروك، هذاما تجلى في الأشكال التي رسمها.

ومع ذلك، فإن مشاريعه لا تزال فريدة من نوعها، فهو لم يعيد إنتاجها في كثير من الأحيان، وكان يفضل الموقع وتاريخ كل من تصاميمه، كما كان يبحث باستمرار عن معيار الجمال، فاتخذ الخرسانة المسلحة كمادة تساعد. لجعل أفكاره ملموسة، بالاعتماد على التقدم وكذلك براعة زملائه المهندسين، قدرتهم على الابتكار في هذا المجال. بالإضافة إلى استخدام الهندسة غير إقليدية لعدد كبير من مشاريعه، مع تفضيل المنحنى والمدى الواسع.

ومن هذا المنظور سيندرج بحثنا، الذي من خلال دراسة جامعة الاخوة منتوري-قسنطينة 1، سيتطرق الى الهندسة التي يستخدمها المهندس المعماري.

هذا المشروع، الذي يعتبره نيماير ويصفه بأنه الأكثر إنجازاً في الجزائر والعالم، هو أول عمل قام به في الجزائر في عام 1969، وتم تصميمه بطريقة جديدة تعتمد على علم الاجتماع وتسعى إلى تصميم جامعة المستقبل.

هذا، على عكس البرنامج الأولي، يحتوي على عدد صغير من المباني، ويجمع بين نوعي الهندسة وهما " الهندسة الإقليدية "و" الهندسة غير الإقليدية، وقد تم العثور على خصوصية هذه الأخيرة في الفرضية الخامسة لإقليدس، حيث يكون مجموع زوايا المثلث إما أكبر أو أصغر من 180 درجة.

الكلمات الرئيسية: أوسكار نيماير، النمط الدولي، الهندسة غير الإقليدية، جامعة الاخوة منتوري-قسنطينة 1.

Table des matières :

1. Introduction au sujet de recherche	1
2. La problématique générale	2
3. Les objectifs de la recherche	3
4. La méthodologie	3
Chapitre I :	7
Rétrospective des styles architecturaux durant les deux décades 1960- 1970 :	7
a) Le style international	7
b) Le postmodernisme	10
c) Niemeyer et son approche architecturale durant les années 1960-1970 :	12
1. Biographie de l'architecte	12
2. L'architecture de Niemeyer entre 1960 et 1970	14
3. Les principes de l'architecture d'Oscar Niemeyer	18
Chapitre II :	28
L'approche architecturale de Niemeyer par la géométrie non euclidienne :	28
I. Aperçu sur Les deux types de géométrie :	28
1. La géométrie euclidienne :	28
2. La géométrie non euclidienne :	30
II. Le recours de Niemeyer à la géométrie non euclidienne durant les années 1960 et 1970	38
Chapitre III :	42
Analyse géométrique du cas d'étude : L'auditorium de l'Université des frères Mentouri Constantine 1 :	42
I. Présentation du cas d'étude	42
II. Les étapes de la réalisation	45
III. Description de la structure de l'auditorium :	48
a) La poutre	48
b) Les coques (Dalles)	49
IV. Analyse géométrique de l'auditorium:	50
1. Démonstration géométrique :	54
Chapitre IV :	57
Identification des corrélations : Forme géométrique/ Structure :	57
I. Les objectifs recherchés	57
II. Interprétation des corrélations forme géométrique/ structure	59

III. Identification des types de solutions architecturale et/ou techniques imposées par la corrélation	62
Conclusion générale	64
Bibliographie	66
Annexes :	68
- Article : Poincaré et son disque	68
- Extraits de planches de l'exposition présentée par la Fondation Oscar Niemeyer pour les Universités et Ecoles d'architecture. Mai 2013, EPAU, Alger.	102

Table des illustrations :

Table des schémas :

Schéma 01 : Carte heuristique du Mémoire Master de SAIDANE Feriel.....	04
Schéma 02 : Organigramme de la méthodologie utilisée pour notre recherche.....	04
Schéma 03 : Groupe antagonistes des CIAM d'après-guerre.	09
Schéma 04 : Courants et tendances architecturales du style international.	09

Table des figures :

Figure 01 : Ministère de la santé et de l'éducation, ministère de la culture actuellement 1936-1943	05
Figure 02 : Plan Brasilia 1960	05
Figure 03 : Image aérienne de l'université de Constantine 1969-1972	06
Figure 04 : Image aérienne et plan de l'USTHB 1974	06
Figure 05 : Image aérienne de l'EPAU 1969	06
Figure 06 : La coupole d'Alger 1973-1975	06
Figure 07 : Maquette de la mosquée d'Alger 1968	06
Figure 08 : 3D du projet de la bibliothèque Arabo Sud-Américaine 2006	06
Figure 09 : ensemble à Saint-Louis dans le Missouri en 1972 et sa destruction	11
Figure 10 : Salk Institute de Louis Kahn à La Jolla en Californie (1959-1965)	11
Figure 11 : Espace d'Abraxas (1978-1983), France	11
Figure 12 : Siège du parti communiste à Paris.	13
Figure 13 : Maquette et projet réalisé du siège du journal L'Humanité à Saint-Denis	13
Figure 14 : Ministère des relations extérieures à Itamaraty	15
Figure 15 : Ministère de la justice	15
Figure 16 : Le Ministère des Armées (1968-1972),	15
Figure 17 : le mémorial Juscelino Kubitschek (1980-1981)	15
Figure 18 : l'hôtel national (1968-1970)	15
Figure 19 : Obra do Berçao (1937-1940)	15
Figure 20 : Siège des Empresas Graficas o Cruzeiro à Rio (1949-1950)	16
Figure 21 : Casino Pampulha (1940-1942),	16

Figure 22 : siège de Mondadori (1968-1975)	16
Figure 23 : l'immeuble FATA European Group à Turin Italie (1975-1979)	17
Figure 24 : L'immeuble Copan à Sao Paulo	16
Figure 25 : La salle de bal à Pampulha (1940-1942)	17
Figure 26 : l'immeuble de logement Barra Tijuaca (1973-1982)	17
Figure 27 : le musée de l'Aviation du parc Ibirapuera	22
Figure 28 : le Palais des congrès à Brasilia (1958-1960)	22
Figure 29 : l'église Sao Francisco de Assis à Pampulha (1940-1944)	22
Figure 30 : Couverture des tribunes érigées sur l'esplanade du ministère des Armées à Brasilia (1968-1972)	23
Figure 31 : le buste sculpté du célèbre écrivain national	23
Figure 32 : l'auditorium du Lycée Belo Horizonte (1954-1956)	23
Figure 33 : l'auditorium de la Bourse du travail à Bobigny (1972-1982)	23
Figure 34 : Pilotis de l'Obra do Berço (1937-1940)	24
Figure 35 : Pilotis de la salle de bal de Pampulha (1940-1943)	24
Figure 36 : Pilotis de la bibliothèque de Belo Horizonte 1955	24
Figure 37 : Pilotis la maison de l'architecte à Canoas (1953-1954)	24
Figure 38 : Pilotis de la banque Baovista 1946 à Rio	24
Figure 39 : Pilotis l'université de Brasilia (1960-1963)	25
Figure 40 : Pilotis en V de l'auvent de l'entrée du Casino de Pampulha (1940-42)	25
Figure 41 : Pilotis en V arrondi dans la chapelle de Sao Francisco	25
Figure 42 : Villa Stein 1927 à Garches par Le Corbusier	25
Figure 43 : le palais des Nations	25
Figure 44 : le palais des Etats 1951 à Sao Paulo	25
Figure 45 : Les pilotis l'immeuble de logement et de commerce Conjunto Juscelino Kubitschek à Belo Horizonte 1951	26
Figure 46 : Les pilotis de l'Hôpital Sul América à Rio 1952	26
Figure 47 : palais de l'Aurore (1957-1959)	26
Figure 48 : palais de la cour suprême (1958-1960)	26
Figure 49 : palais Panalto (1958-1960)	27
Figure 50 : palais du ministère des Relations extérieures dit « Itamaraty »	27

Figure 51 : palais de la Justice	27
Figure 52 : siège des éditions Mondadori 1968 près de Milan	27
Figure 53 : bâtiment FATA European Group (1975-1979) à Turin	27
Figure 54 : Rampe de la grande salle de jeu du casino de Pampulha (1940-1942)	27
Figure 55 : Rampe du palais de l'industrie du parc Ibirapuera à Sao Paulo	27
Figure 55 : Rampe du palais de l'industrie du parc Ibirapuera à Sao Paulo	27
Figure 56 : postulat 01	28
Figure 57 : postulat 02	29
Figure 58 : postulat 03	29
Figure 59 : Postulat 05	29
Figure 60 : Postulat 05, formule commune	29
Figure 61 : Triangle sphérique.	35
Figure 62 : Triangle sphérique et triangle euclidien.	35
Figure 63 : triangle sphérique.	35
Figure 63' : digone.	35
Figure 64 : Ellipsoïde.	35
Figure 65 : représentation de Lobatchevski.	35
Figure 66 : Disque de Poincaré et ses éléments.	34
Figure 66' : Dessin d'Escher.	34
Figure 67 : Demi-plan de Poincaré et ses éléments.	35
Figure 68 : Calcul longueur d'une courbe.	36
Figure 69 : les droites parallèles ne se coupent toujours pas.	36
Figure 70 : triangle formé par trois droites et une normale.	37
Figure 71 : triangle formé par trois demi-cercles.	37
Figure 72 : triangle à 0°	37
Figure 73 : triangle à 180°	37
Figure 74 : quadrilatère formé par deux demi-droites et deux demi-cercles de centre.	37
Figure 75 : quadrilatère formé avec une seule demi-droite.	37
Figure 76 : quadrilatère formé par quatre demi-cercles.	37
Figure 77 : Géométrie du Palais de l'Aurore.	40

Figure 78 : Géométrie de la cathédrale Nossa-Senhora-Aparecida (1959-1970) à Brasilia. ..	40
Figure 79 : La maison de la culture du Havre (1970-1982).	40
Figure 80 : Bibliothèque Arabo Sud-Américaine.	41
Figure 81 : Les différents blocs de l'université.	44
Figure 81' : Vue d'ensemble de l'université.	44
Figure 82 : Aménagement de l'espace en un parc.	46
Figure 83 : Forme et structure du bloc des cours avec croquis de l'architecte.	46
Figure 84 : Chantiers de réalisation.	47
Figure 85 : Croquis de Niemeyer de l'auditorium et du bloc des cours.	47
Figure 86 : Répartition des charges des deux coques sur la poutre centrale.	48
Figure 87 : Zoom sur la répartition des charges sur la poutre centrale.	48
Figure 88 : Répartition des charges sur les dalles.	49
Figure 89 : Plan masse de l'université.	51
Figure 90 : Identification de la géométrie des bâtiments.	52
Figure 91 : Forme de l'auditorium et de la poutre centrale.	52
Figure 92 : terminaison de l'arc et son intersection avec le sol.	53
Figure 93 : représentation de la forme de l'aile de l'auditorium en se basant sur le demi-plan de Poincaré.	53

1. Introduction au sujet de recherche :

Durant les années 1960, le mouvement dominant le monde était le mouvement moderne, à travers le style international, qui voulait créer un style universel, en l'unissant à travers une seule et même architecture, suivant des principes établis lors des congrès des CIAM.

Dès les années 1950, le style international allait se diviser en plusieurs courants architecturaux à savoir : le courant brutaliste, la tendance formaliste à travers deux courants architecturaux l'un favorisant le sculptural et l'autre une expression minimaliste. Par ailleurs si le courant structuraliste prônait l'harmonie par la multiplication des unités de base ; le courant expressionniste allait accorder lui, une extrême importance à l'exhibition de la prouesse technique des structures.

Cependant, durant la fin des 1960 un autre mouvement émerge, privilégiant cette fois la forme au-dessus de la fonction. Ce dernier est apparu afin de remettre en cause le mouvement antérieur, et de ce fait il rejetait toute forme d'universalité, car celle-ci a fait que les pays perdaient leurs identités, et les architectes leurs personnalités et leur capacité créative.

De là, nous comprenons que le Style international s'est égaré des principes des CIAM, car chacun des courants d'architecture était parti développer son approche qui lui sied.

Parallèlement, et plus exactement en 1962, l'Algérie prend son indépendance et de ce fait, veut être au même niveau que les autres, ou du moins les rattraper, cherchant à se développer et à se faire connaître par le monde entier. De nouveaux projets ambitieux sont alors lancés, et on fait appel à de grands architectes; afin de les réaliser. Parmi eux, Oscar Niemeyer, considéré comme l'un des plus grands architectes de notre ère. Ces œuvres ont fait l'objet de plusieurs débats, conférences mais aussi des recherches académiques. Nous citons celle effectuée à l'EPAU par Mlle SAIDANE Feriel, où elle a essayé d'identifier le courant d'affiliation architecturale des œuvres d'Oscar Niemeyer en ayant comme cas d'étude l'EPAU, en établissant un constat, de la forte ressemblance de l'EPAU au projet de CEPLAN¹ non seulement au niveau formel mais aussi au niveau structurel (Schéma 01). Aujourd'hui nous avons appris qu'un doctorat est en cours d'élaboration à l'EPAU au sein du Laboratoire architecture et environnement « LAE », traite l'aspect du respect environnemental d'Oscar Niemeyer dans ces conceptions en prenant comme cas d'étude l'Ecole polytechnique d'Architecture et d'Urbanisme « EPAU ».

Malgré les convictions modernistes d'Oscar, et après avoir été disciple et dessinateur de Le Corbusier (1936-1943), Niemeyer aurait changé la hauteur des pilotis de 4m à 10m afin d'affiner le bâtiment, mais Le Corbusier se serait approprié l'idée, pour le projet du ministère de l'Éducation et de la Santé (devenu palais de la Culture) (Planche 01, figure 01), icône du style international. Il change ses principes avec la réalisation du projet de Brasilia 1960 (Planche 01, figure 02), et se démarque de Le Corbusier dans les formes qu'il privilégie en démontrant sa forte capacité d'innovation. Il ne se contentait plus des formes géométriques simples et pures, il allait au-delà, car il s'inspirait de la nature. Il dit : « *Seule m'attire la courbe libre et sensuelle, que je rencontre dans les montagnes de mon pays, des cours de rivières, des vagues, du corps de la femme, l'univers est fait de courbes* »², c'est là où fut le constat de sa forte volonté de

¹ Centro de Planejamento en portugais, qui signifie Centre de Planification.

² Edouard Bailby, Oscar Niemeyer, « Niemeyer Par lui-même », Editions : Jacob Duvernet, 1993.

liaison avec la nature. Il considérait l'architecture comme « *une chose personnelle* »³, ayant comme point de départ la liberté et comme but essentiel la beauté. Ce qui l'a amené à trouver des solutions courageuses et audacieuses pour certains et banales pour d'autres, et ceci en raison de l'utilisation des métaphores organiques ou encore mécaniques comme le parapluie qui pour certains de ses projets échappaient carrément aux normes de la géométrie euclidienne.

En exil en France durant la période à laquelle les projets ont été lancés au Brésil, il passe par l'Algérie et plusieurs projets lui sont alors attribués tel que : l'Université de Constantine (1969-1972) (Planche 02, figure 03), l'Université de science et technologie Houari Boumedién USTHB (1974) (Planche 02, figure 04) , l'école polytechnique d'architecture et d'urbanisme EPAU (1969) (Planche 02, figure 05) , la coupole (1973-1975) (Planche 02, figure 06), un centre commercial, un centre d'affaire non réalisé (1968) à l'emplacement actuel du centre commercial Ardis, une mosquée (1968) (Planche 02, figure 07) non réalisée et plus récemment une bibliothèque en cours de réalisation 2006 (Planche 02, figure 08).

C'est dans cette optique que va s'inscrire notre recherche, qui à travers l'étude de l'Université des Frères Mentouri Constantine 1, qui fut la première réalisation de Niemeyer en Algérie, lèvera le voile sur le type de géométrie utilisé dans cette œuvre, ainsi que les différentes métaphores utilisées non seulement au niveau des volumes des bâtiments mais aussi au niveau du plan masse.

Malgré avoir enrichi le registre de l'architecture universelle contemporaine par ses œuvres exceptionnelles, son architecture reste incomprise et non conservée en Algérie. Plus tard lors d'une visite à lui à l'Ecole polytechnique d'Architecture et d'Urbanisme « EPAU », il a exprimé sa déception quant à la mise en œuvre et la réalisation du projet, qui étaient loin d'être ce qu'il avait prévu et encore moins ce qu'il avait imaginé, en plus des nombreuses opérations de modifications et de consolidation au niveau structurel.⁴

2. La problématique générale :

Suite au panorama de toutes les réalisations et les œuvres d'Oscar Niemeyer, nous avons pu constater que l'architecte avait privilégié pour certains de ses projets de recourir à la métaphore architecturale, en puisant ses références symboliques de plusieurs domaines organiques naturels, tel que : le cratère du volcan (la géologie), l'oiseau (zoologie) ; ou parfois symbolique comme l'œil ou la soucoupe volante empruntée de la science-fiction.

Ainsi les questions que nous nous sommes posées dans le cadre de cette recherche sont les suivantes :

- 1- La forme architecturale de l'œuvre d'Oscar Niemeyer, découle-t-elle d'un geste hasardeux, fruit de son imagination ?
- 2- Dans le cas contraire, malgré le caractère imprécis du geste contenu dans les croquis de l'esquisse ; Oscar Niemeyer savait pertinemment comment les réaliser grâce à l'apport d'une géométrie non euclidienne. Ainsi comptait-il sur d'autres compétences des ingénieurs, pour assurer la faisabilité technique de ses réalisations ?

³ Nicoletta Trasi, Oscar Niemeyer, « permanence et invention » 2007.

⁴ Mr KANOUN Enseignant à l'Ecole Polytechnique d'Architecture et d'Urbanisme.

Suite à ce questionnement, nous avons avancé une question principale relative à un bâtiment de l'Université de Constantine, qui est l'auditorium de l'université.

Dès lors :

A quelle logique géométrique (euclidienne ou non-euclidienne) s'apparente la logique formelle du volume de l'auditorium de l'Université de Constantine ?

3. Les objectifs de la recherche :

A travers cette recherche nous voudrions atteindre les objectifs suivants :

- Parvenir à démontrer la prévalence de la forme au-dessus de la fonction à travers la matérialisation de la métaphore au niveau du volume et du plan masse.
- Relever une seconde forme de métaphore, au niveau du plan masse, car celle-ci va au-delà de l'unité, elle est corrélée avec d'autres unités bâties.
- Déterminer la logique conceptuelle spatiale qui reste gérée par une logique formelle et une autre constructive.

4. La méthodologie :

Il s'agit dans notre recherche d'articuler les outils de deux méthodes distinctes (Schéma 01) :

1. La monographie : En convoquant ici que certains de ses outils, comme : les sources livresques à travers la littérature critiquée et confrontée. L'interprétation des attributs du cas d'étude à travers les sources iconographiques (croquis de l'architecte, photos anciennes du chantier, expositions sur l'architecte et ses œuvres). Les sources directes à travers l'interprétation visuelle sur la base des photos. La monographie s'est réalisée en deux temps par rapport au parcours de l'architecte et ses réalisations à l'étranger et en Algérie.
2. La restitution géométrique de la logique conceptuelle : Et ceci en ayant recours à certains outils analytiques de la géométrie non-euclidienne, qui seront combinés avec des restitution graphique de ces formes.

A travers la géométrie non euclidienne nous tenterons de trouver la métaphore, en utilisant les profils, sans avoir recours aux démonstrations mathématique.

Notre étude revêt le caractère d'une recherche qualitative, ce qui renvoie par voie de conséquences nos hypothèses en guises de conclusion au niveau du dernier chapitre.

Signalons ici, qu'il ne s'agit nullement de faire des démonstrations mathématiques dans cette recherche, mais nous tenterons de trouver la nature des solides ainsi que leurs profils, qui à première vue et appréciations n'appartiennent pas à la géométrie euclidienne.

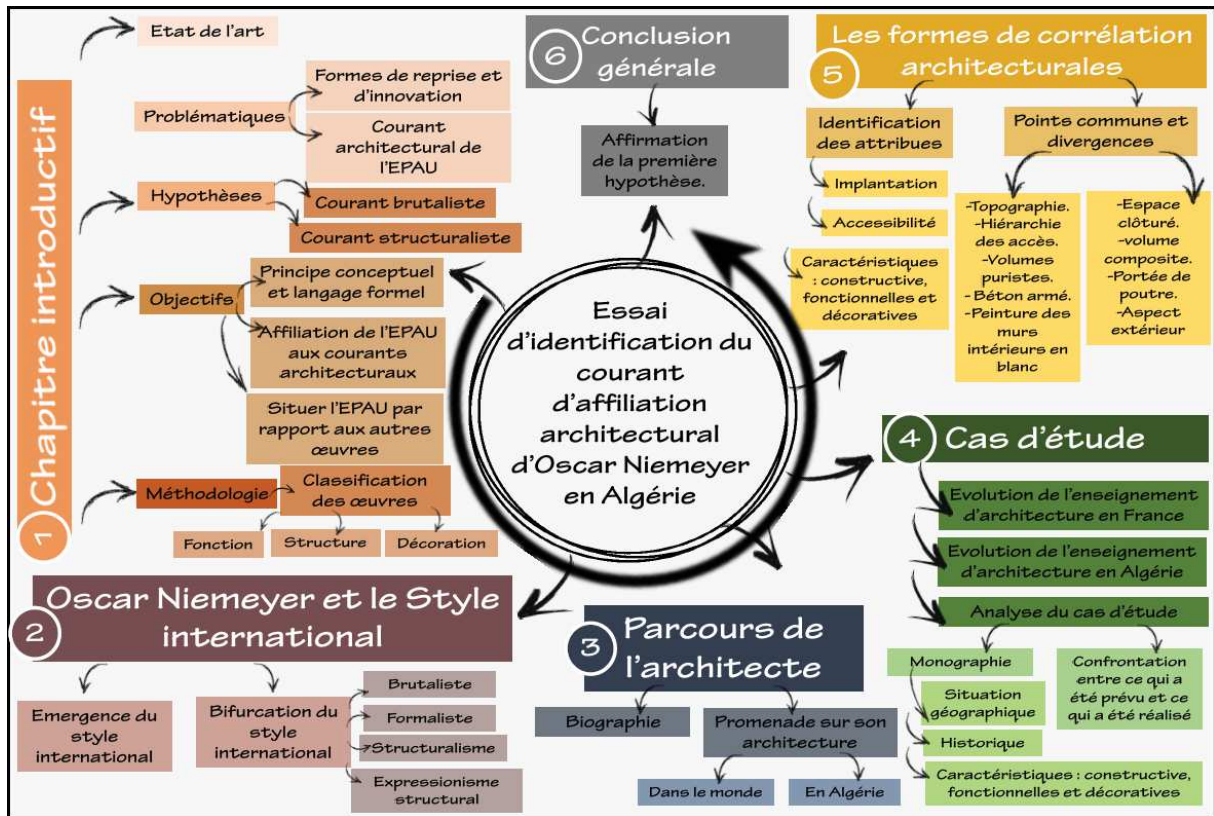


Schéma 01 : Carte heuristique du Mémoire Master de SAIDANE Ferial.

Source : Auteur

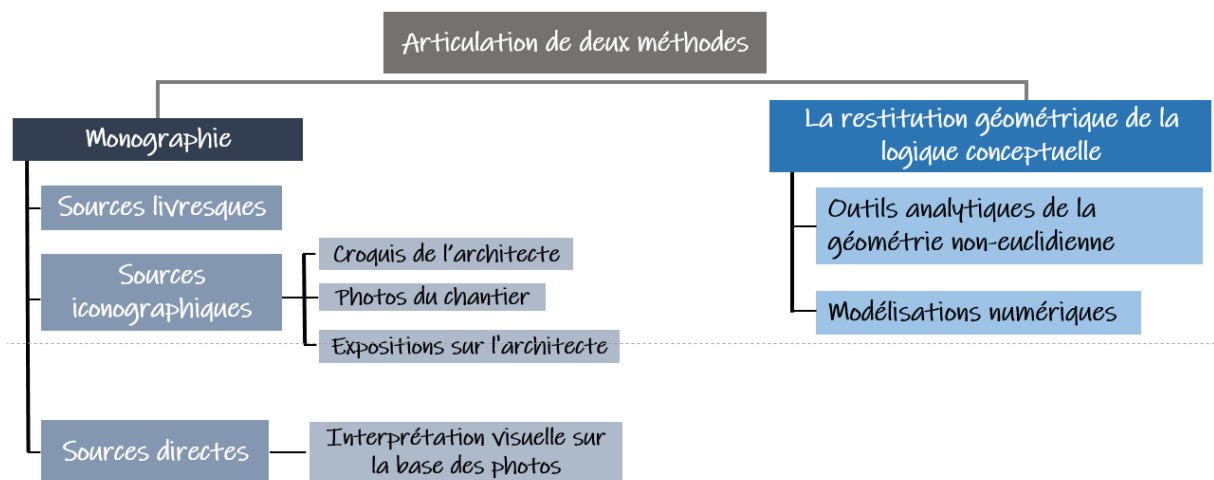


Schéma 02 : Organigramme de la méthodologie utilisée pour notre recherche.

Source : Auteur



Figure 01 : Ministère de la santé et de l'éducation, ministère de la culture actuellement 1936-1943

Source : <https://gravechanmax.wordpress.com/2012/12/11/ministerio-da-educacao-e-da-saude-tout-le-monde-1936-47/>

<http://labaguette.afbahia.com.br/008/portraits.html>

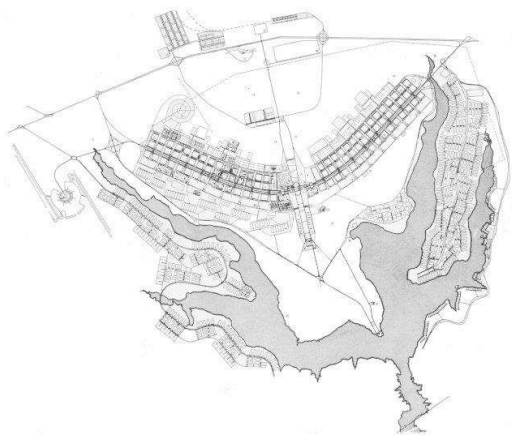


Figure 02 a : Plan Brasilia 1960

Figure 02 b : image aérienne Brasilia

Source : <https://www.lemoniteur.fr/article/brasilia-les-50-ans-d-un-reve.926329>

Source : <https://www.20minutes.fr/monde/diaporama-7234-photo-849794-terre-vue-espace>

Planche 01 : Les premières œuvres de Niemeyer au Brésil

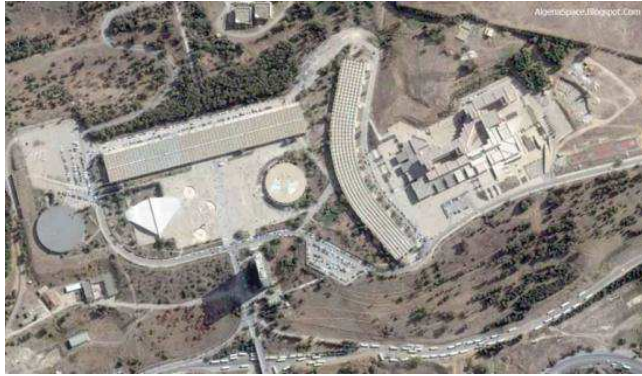


Figure 03 : Image aérienne de l'université de Constantine 1969-1972

Source : <http://sciencesumc.e-monsite.com/album/categorie-par-defaut/constantine-algerie-universite.html>

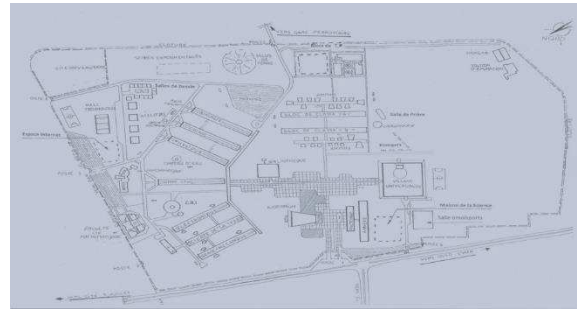


Figure 04 : Image aérienne et plan de l'USTHB 1974

Source : <http://www.usthb.dz/fr/page/319>

<https://stsm-usthb.blogspot.com/stusthb.dz.html/2016/07/>



Figure 05 : L'allée Aoudjhane

Source : Auteur.

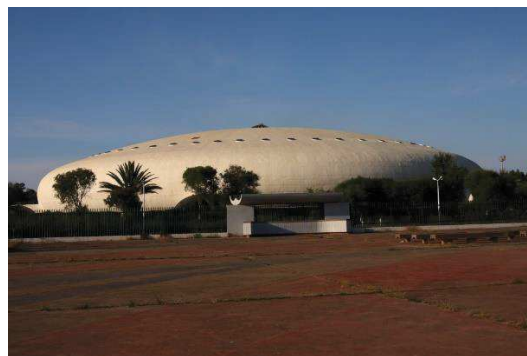


Figure 06 : La coupole d'Alger 1973-1975

Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/La_Coupole_\(salle_omnisports\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/La_Coupole_(salle_omnisports))

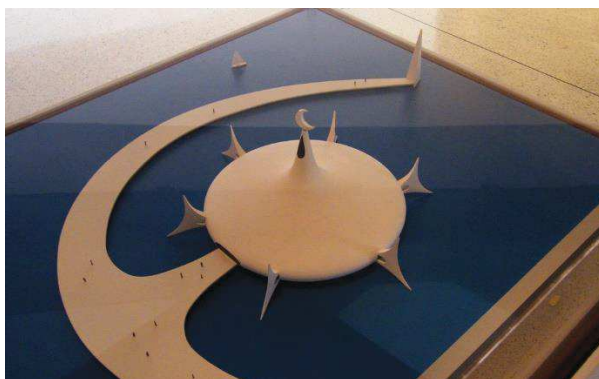


Figure 07 : Maquette de la mosquée d'Alger 1968

Source : <https://www.vinyculture.com/projets-3487-inacheves-oscar-niemeyer-algerie/>

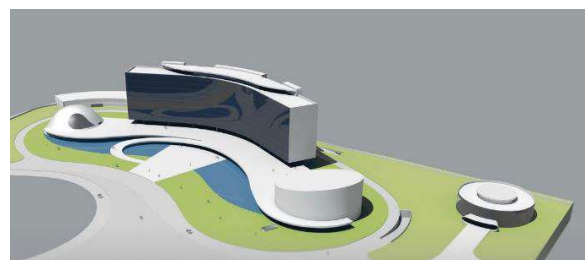


Figure 08 : 3D du projet de la bibliothèque Arabo Sud-Américaine 2006

Source : <http://www.arpc.dz/?q=fr/biblioth%C3%A8que-arabo-sud-am>

Chapitre I :

Rétrospective des styles durant les deux décades 1960- 1970 :

a) Le style international :

Le style est issu du *Mouvement moderne*, développé entre 1920-1940. Ainsi l'école du Bauhaus en Allemagne, et Le Corbusier en France vont caractériser le mouvement moderne en fixant les « Cinq points de l'architecture moderne », lors du congrès des CIAM en 1931.

La rupture a été totale avec le style Beaux-Arts, mais en gardant l'aspect fonctionnaliste d'Eugène Viollet-le-Duc⁵ et de l'Art nouveau. Dès lors il s'agit d'une nouvelle architecture moderne influencée par le cubisme et le néoplasticisme, ayant comme pionniers (Le Corbusier, Gropius, Lurçat et Mies van der Rohe).

Ce terme fut inventé par Henry-Russel Hitchcock et Philip Johnson en 1932, lors de l'exposition intitulée « The international style : Architecture since 1922 » au Museum of Modern Art (MoMA) ainsi qu'un catalogue portant le même nom, où l'on a rassemblé les travaux de plus de 50 architectes, de différentes nationalités.

Ce style faisait référence à une architecture dénuée de toute dimension sociale, une ouverture au monde, qui n'appartenait pas à une seule région, ou à un seul pays, mais une architecture transportable suivant des principes modernes et universels, telle qu'elle était pratiquée par Le Corbusier et les membres du Bauhaus.

Cette émergence coïncide avec le développement de nouvelles techniques qui permettaient un fonctionnalisme renouvelé, contenant la pratique et l'esthétique de la forme et rejetant toute forme d'ornement. Cette architecture tourne le dos aux styles passéistes du XIX siècle, dorénavant un seul mot d'ordre « Le fonctionnalisme », avec une esthétique propre à ce mouvement, cherchant à développer un ensemble basé sur quelques grands principes. Il associe la technologie et la fonction dans une relation où la technologie ne peut qu'améliorer la fonctionnalité.

C'est vers le milieu des années 1930, que ce style fut reconnu dans le monde occidental, pour se propager ensuite dans les autres régions du globe.

Ce style se fonde sur des principes qu'Hitchcock et Johnson⁶ ont exposés, il s'agit :

- 1- L'architecture doit être perçue en tant que volume, utilisant une ossature de colonne suivant les pilotis de Le Corbusier, privilégiant le plan libre, pour se libérer de l'effet de masse qui avait caractérisé l'architecture antérieure.
- 2- L'organisation structurelle, il s'agit de l'espacement régulier entre les éléments porteurs, en ajustant les exigences fonctionnelles à la régularité de la structure des éléments préfabriqués, ce principe a été fortement critiqué.

⁵ Né le 27 janvier 1814 à Paris, et mort le 17 septembre 1879 à Lausanne, est l'un des architectes français les plus célèbres du XIX^e siècle, connu auprès du grand public pour ses restaurations de constructions médiévales,

⁶ HITCHCOCK. Henry-Russel et JOHNSON. Philip, « *Le style international* », Editions : Parenthèses, Marseille, 2001.

- 3- Interdiction de toute forme d'ornementation, traduit par le refus de la superficialité des architectures du 19ème. Or cette architecture doit être caractérisée par la simplicité, où l'ornementation doit être réduite au strict minimum et servir la clarté de l'ensemble.

Toutefois Hitchcock avait déclaré vingt ans plus tard en 1951⁷, que les principes étaient un peu trop étroits et très peu nombreux, il aurait ajouté comme troisième principe l'articulation de la structure, et omettrait la référence d'ornement, qui reste une question de goût avant tout.

A partir des années 1960, Philip Johnson mettra en avant d'autres caractéristiques tels que : l'honnêteté structurelle, les rythmes modulaires répétitifs, la clarté exprimée par de larges surfaces de verre, le toit plat, la boîte en tant qu'enveloppe et le rejet de toute forme d'ornementation.

Formée après la deuxième guerre mondiale, l'Union Internationale des Architectes (UIA), est le propagateur premier de l'architecture moderne, sur le modèle des CIAM et des Nations unies, elle reprend les idées de l'internationalisme.

Cependant, le modernisme qui tentait de faire naître un monde en défendant l'architecture internationale est attaqué en 1960. Tom Wolfe critique dans son ouvrage⁸ et le mouvement moderne et le style international, dans lesquels il ne voit qu'une mode sociale et intellectuelle qui définit la forme esthétique, tout en reprochant aux architectes d'avoir abandonné leur personnalité artistique pour des manifestations moins crédibles de mercantilisme et de luxe.

Les choses ne s'arrangent pas avec la disparition des Maîtres ainsi que la dissolution du CIAM, ou encore les nouvelles préoccupations de l'UIA et des autres associations, qui prennent d'autres directions, Dès lors « less is bore »⁹ remplace « less is more »¹⁰.

La révolte contre ce style atteint son paroxysme avec l'arrivée de Charles More, Robert Venturi ainsi que Aldo Rossi, où l'ont contredit les principes du style, à travers la publication de deux ouvrages à savoir « L'architecture de la ville » d'Aldo Rossi où il rejetait ce qu'il qualifiait de fonctionnaliste et avait proposé une nouvelle approche de l'habitat urbain ; et « Complexité et contradiction dans l'Architecture » de Venturi, où celui-ci évoquait les immeubles d'habitation qu'il trouvait dépourvus d'expression. En général, ces ouvrages proposent entre autres une nouvelle voie pour l'architecture à venir. Se joint à eux Norbeg-Shulz avec son ouvrage « New Chicago Architecture, Beyond the international Style » publié en 1981, dans lequel il déplore l'architecture du style international, qui malgré ses formes claires et ses surfaces lisses, constate que l'esthétique architecturale est passée de mode.¹¹

En effet, Oscar Niemeyer sans nul doute était partisan du style international, nous constatons que les architectes de ce style étaient confrontés au choix suivants. Soit de :

- Développer un style international et d'essayer de l'humaniser pour éviter le piège de cages de verre abstraites sur un châssis en acier,

⁷ KHAN Hasan-Uddin, « *Le style international* », Editions : TASCEN GmbH, Chine 2009

⁸ WOLFE Tom « *From Bauhaus to Our House* », publié en 1981.

⁹ Less is bore : moins c'est ennuyeux.

¹⁰ Less is bore : moins c'est mieux.

¹¹ GHIRARDO Diane, « *Les architectures postmodernes* », Editions : THAME & HOUDSON SARI, Paris 1997

- Ou chercher des moyens d'expression nouvelle, en mettant les œuvres dans un répertoire de styles qui mettrait la forme en tant qu'objet à contemplation, véhiculant des messages.

Le problème a été, que l'abstraction peut être humanisée que de deux manières - par la différenciation de texture et de détail (et donc le type d'ornement), ou par différenciation impliquant la forme, ce qui conduit inévitablement à une nouvelle version de l'expressionnisme. Les deux méthodes sont un déni de style international, où il n'y avait aucun ornement, et la combinaison des volumes est subordonnée à la fonction.

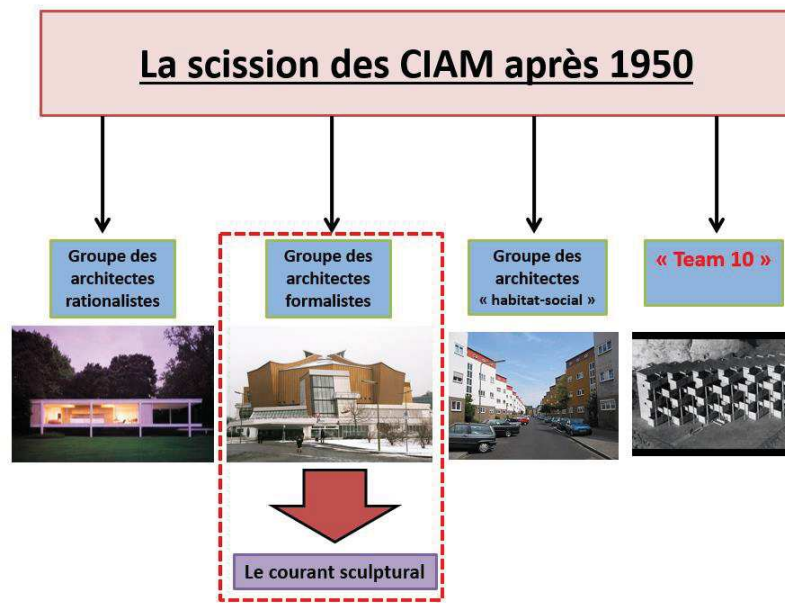


Schéma 03 : Groupe antagonistes des CIAM d'après-guerre.

Source : CHENNAOUI.Y Cours d'Histoire de l'architecture.

De ce fait, divers groupes antagonistes, étaient actifs dans cette organisation, nous citons en l'occurrence : Le groupe des architectes rationalistes, les formalistes, les membres qui étaient partisans de logements de masse de faible hauteur (Ernst May), et le groupe (Team 10), qui était derrière le développement du structuralisme en architecture.

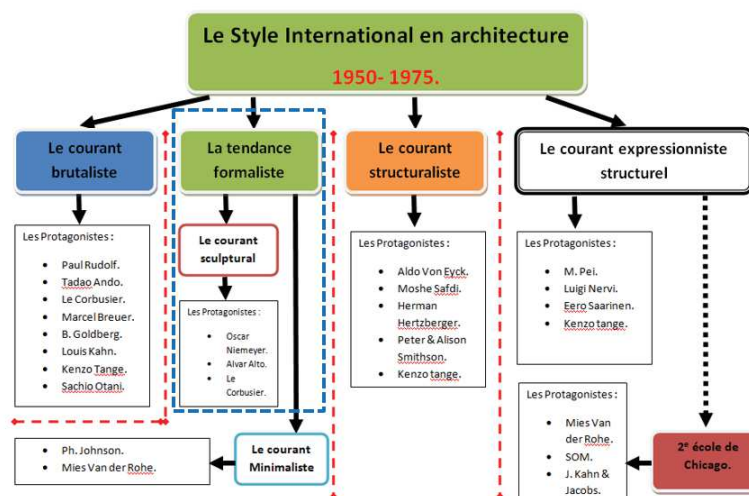


Schéma 04: Courants et tendances architecturales du style international.

Source : CHENNAOUI.Y Cours d'Histoire de l'architecture.

b) Le postmodernisme :

Apparu d'abord aux Etats-Unis pour ensuite se propager partout dans le monde, particulièrement dans les pays industrialisés. Précisément après la destruction d'un ensemble à Saint-Louis dans le Missouri en 1972 (Planche 03, figure 09), qui s'est avéré inhabitable, et construit suivant les théories du modernisme, avait impulsé l'émergence d'un nouveau style architectural.

C'est une architecture inscrite dans le sillage du moderniste tout en étant différenciée. Un concept pluriel et instable dans le sens où les postmodernistes refusaient l'unité de l'architecture dans toutes les régions du monde, contrairement aux modernistes qui favorisaient ces différences ; afin de mettre en avant ce qui avait été marginalisé par les cultures dominantes.

Le bâtiment Salk Institute de Louis Kahn à La Jolla en Californie (1959-1965) (Planche 03, figure 10), transcendait les pires défauts du modernisme des années 1960 aux Etats-Unis à savoir la fétichisation de la structure et de la technologie ; ici la manifestation du registre formel de Kahn, avait interprété de manière précise et simple le programme tout en mettant en valeur le site et le traitement du béton.

C'est grâce à l'ouvrage de Venturi précédemment cité « Complexité et contradiction dans l'Architecture » 1966, qu'une nouvelle école américaine constituée par Moore, Eisenman, Graves, Soleri et Meier, voit le jour et joue un rôle fondamental dans l'apparition de ce mouvement. Mais c'est avec les architectes des années 1970 qu'il s'est développé.

Alors que le mouvement moderne privilégiait la fonction et la construction, le mouvement postmoderne quant à lui fait l'inverse en privilégiant la forme. Rejetant les principes de leurs prédécesseurs. Les architectes de ce mouvement devaient trouver de nouvelles racines sur lesquelles s'appuyer. Dès lors, certains redécouvrent la tradition ancienne à travers les colonnes, les chapiteaux et les frontons tel que Ricardo Bofill (Espace d'Abraxas (1978-1983), en France) (Planche 03, figure 11), tandis que d'autres se sont retournés vers l'architecture des années 1930, en la reprenant de façon nouvelle.

Ce mouvement avait comme principale préoccupation, le rejet de l'autonomie ; ainsi que le rejet de l'édifice isolé dans un espace vert, mais cherchait plutôt des édifices bien intégrés dans leur tissu urbain, et une envie de création de monumentalité ; au niveau des façades. Les ouvertures devaient être plus nombreuses et reliées par l'aspect décoratif. Les principes de composition ont eux aussi été redécouverts, dès lors il s'agit de la partie d'un tout qui devait être enchaînée à travers deux lois : la hiérarchie et la limitation.

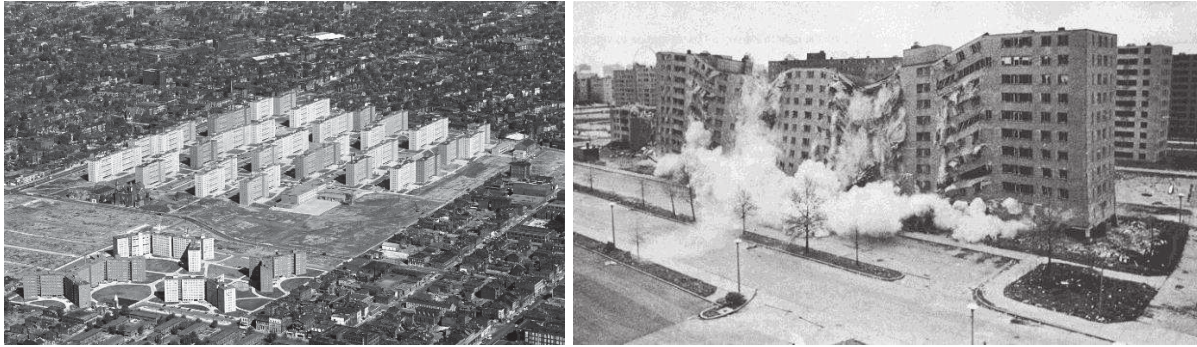


Figure 09 : ensemble à Saint-Louis dans le Missouri en 1972 et sa destruction

Sources : <https://www.flickr.com/photos/memoire2cite/27228820617>.

<http://dant.fr/les-ruines-du-modernisme-un-nouveau-terreau-pour-une-reconciliation-de-lindividu/>



Figure 10 : Salk Institute de Louis Kahn à La Jolla en Californie (1959-1965)

Source : <https://gruil.com/third-female-scientist-sues-salk-institute-alleging-gender.html>



Figure 11 : Espace d'Abbraxas (1978-1983), France

Source : <https://www.boumbang.com/les-espaces-dabbraxas-de-ricardo-bofill/>

Planche 03 : Les dernière œuvres du mouvement moderne, et le retour à la tradition pour certains du mouvement postmoderne.

c) Niemeyer et son approche architecturale durant les années 1960-1970 :

1. Biographie de l'architecte :

Oscar Ribeiro de Almeida de Niemeyer Soares naît dans le quartier de Laranjeiras à Rio de Janeiro le 15 décembre 1907 dans une famille de six enfants, d'un père graphiste. Son grand-père Ribeiro de Almeida était procureur de la République et avait épousé une immigrée allemande, dont le nom était Niemeyer, ce dernier est celui qui le désigne car il est très peu commun et courant au Brésil contrairement à Ribeiro et Soares qui sont des noms portugais et Almeida un nom d'origine arabe.

Il entame ses études d'architecture en 1929 à l'école Nationale des beaux-arts de Rio de Janeiro et en sort diplômé en 1934. Sa formation était ancrée dans le classicisme français, à cause de la colonisation européenne et la forte influence française dans les domaines de construction. Tandis qu'à cette époque le modernisme européen et nord-américain marque l'architecture internationale avec les pionniers de l'architecture moderne Gropius, Wright et Le Corbusier. Le Brésil ne l'avait pas encore adopté en raison du faible développement économique dû à sa récente indépendance. Il déclare plus tard lors d'une interview, que : « *L'enseignement de l'École nationale des beaux-arts était plein de lacunes, à tel point que nous étions contraints de chercher notre voie en autodidactes, en dehors du cadre scolaire.* »¹²

En raison de son attirance pour le courant de Le Corbusier représenté au Brésil par Lucio Costa il intègre l'agence d'architecture de Lucio Costa et de Carlos Leão en tant que stagiaire malgré les difficultés financières qu'il avait, il décide de travailler gratuitement en espérant trouver des réponses à des doutes d'étudiant en architecture, avec un seul objectif : être un bon architecte.

C'est en 1936, qu'ils décident de participer avec Lucio Costa, Le Corbusier et d'autres architectes à la conception du nouveau siège du ministère de l'éducation et de la santé à Rio de Janeiro pour le gouvernement de Getúlio Vargas. Plus tard et après plusieurs succès, le président de la République du Brésil, Juscelino Kubitschek, accorde le projet de construction de la nouvelle capitale administrative Brasilia (décrétée Patrimoine mondial de l'humanité en 1987 par l'Unesco) à Lucio Costa qui conçoit le plan de la ville et Oscar Niemeyer réalise les principaux bâtiments publics, c'est ainsi que la notoriété de l'architecte devient mondiale après l'inauguration de Brasilia en 1960.

Avec le changement du pouvoir au Brésil, qui laisse place à la dictature militaire en 1964, Niemeyer décide de s'exiler en France, lui qui est membre du Parti communiste brésilien depuis 1945, et conçoit alors plusieurs édifices entre autres le siège du Parti communiste français (figure 12), place du colonel Fabien à Paris et le siège du journal L'Humanité à Saint-Denis (figure 13), ainsi sa demande d'exil en France fut soutenue par le ministre de la Culture. À cette époque, il est aussi designer de meubles et travaille notamment en collaboration avec sa fille Anna Maria Niemeyer.

Mais durant son exil en France et sa vie en Europe il est aussi passé par l'Algérie, où il s'est lié d'amitié avec le président algérien Houari Boumedienne qui aimait beaucoup son architecture. Celui-ci lui demanda d'être son conseiller quant aux questions et décisions architecturales.

L'ex-président Houari Boumedienne avait beaucoup de projets dans son programme de développement : des pôles universitaires, une grande mosquée, mais aussi le réaménagement urbain d'Alger. Il comptait sur Niemeyer pour les réaliser. Ce dernier a pu concrétiser dans le

¹² Jean Petit, « Niemeyer poète d'architecture », Editions Arte Lugano, 1995.

réal l'université de Constantine des frères Mentouri (1969-1972) qui lui tient particulièrement à cœur et qu'il considérait comme un des projets les plus aboutis en dehors du Brésil. Il le dit : « Parmi tous les projets réalisés, celui de l'Université de Constantine tient une place particulière, pour plusieurs raisons. D'abord c'était un défi architectural. Je voulais que le béton obéisse à mon esthétique dans le cadre du relief dramatique et accidenté de Constantine, une ville accrochée à un rocher, et comme suspendue dans le vide. (...) Lorsqu'il m'arrive en privé ou en public de parler de mon travail, des choses que j'ai réalisées, je dis toujours que l'Université de Constantine fait partie de mes réalisations les plus accomplies »¹³. L'école Polytechnique d'Architecture et d'Urbanisme (EPAU) (1970), l'Université des Sciences et Technologie Houari Boumédién (USTHB) (1974), la coupole du complexe sportif « Mohamed Boudiaf » (1972-1975) qui est un autre exploit architectural et constructif. Dans ce dernier Niemeyer à travers deux axes qui font 54m et 62m, rend hommage à la révolution algérienne à sa façon.

Il recevra durant sa carrière un grand nombre de prix, c'est l'un des architectes les plus célèbres de son époque, parmi ces prix on compte : médaille d'or de l'American Institute of Architects (1970), Prix Pritzker (1988) dix ans plus tard médaille d'or du Royal Institute of British Architects (1998), Praemium Imperiale (2004), son dernier prix fut commandeur de la Légion d'honneur en (2007). Il a reçu ces prix non-seulement grâce à son appartenance au mouvement architectural moderne du style international qui en ce temps-là était à son apogée, mais aussi grâce aux formes réalisées qui sont considérées comme des exploits architecturaux et tout ça en utilisant son matériau de prédilection le béton armé. Il dit : « Lorsque je dessine, seul le béton me permettra de maîtriser une courbe d'une portée aussi ample. Le béton suggère des formes souples, des contrastes de formes, par une modulation continue de l'espace qui s'oppose à l'uniformisation des dispositifs répétitifs du fonctionnalisme international »¹⁴ ce qui lui permettait de réaliser n'importe quelle forme qui lui venait en tête.



Figure 12 : Siège du parti communiste à Paris.

Source :

<http://jm.lyonnet.free.fr/projets/PCF/Pcf.html>



Figure 13 : Maquette et projet réalisé du siège du journal L'Humanité à Saint-Denis

Source : <https://www.centrepompidou.fr>

<https://structurae.info/ouvrages>

¹³ S. Hadj Ali: Oscar Niemeyer, Le testament l'Algérie. Le soir d'Algérie décembre 2012

¹⁴ Edouard Bailby, Oscar Niemeyer, « Niemeyer Par lui-même », Editions : Jacob Duvernet, 1993.

2. L'architecture de Niemeyer entre 1960 et 1970 :

L'inauguration de Brasilia en 1960 fut l'opération d'urbanisme la plus ambitieuse du XX siècle, où Niemeyer fut choisi comme jury du concours national lancé pour sa réalisation, c'est Lucio Costa qui l'emporte et donne le privilège à Niemeyer de concrétiser le geste urbanistique imaginé par Costa, où les corps des bâtiments doivent avoir une symbolique politique et la moins abstraite possible. Dès lors le nom de Niemeyer a un grand poids et fait le tour du monde, et son architecture se fait découvrir à travers ses œuvres architecturales antérieures.

Cependant, cette même date coïncide avec la fin du mandat du président Kubitschek, les travaux de la capitale sont alors ralentis, Niemeyer a deux chantiers à ce moment-là, le Ministère des relations extérieures à Itamaraty (Planche 4, figure 14) et le Ministère de la justice (Planche 4, figure 15), avec un vocabulaire traditionnel combinant la structure de verre et de béton, ainsi que le recours à l'eau et la végétation pour les espaces extérieurs.

En 1964, les militaires prennent le pouvoir. Faisant partie du parti communiste il fait face à certains problèmes avec le nouveau pouvoir et s'exile en France, il est alors partagé entre le Brésil afin de poursuivre les plans de ses principaux bâtiments à Brasilia tels que : Le Ministère des Armées (1968-1972) (Planche 4, figure 16) , la Gare du chemin de fer (1973-1981), ainsi que plusieurs annexes de ministères, et le mémorial Juscelino Kubitschek (1980-1981) (Planche 4, figure 17) et l'hôtel national (1968-1970) (Planche 4, figure 18) ; et la France où il ouvre un bureau d'étude en 1972, mais aussi d'autres pays où il ouvrait des chantiers.

C'est à l'étranger qu'il réalise ses œuvres les plus accomplies et les plus novatrices du point de vue architectural, avec l'ingénieur Joaquim Cardozo, qui lui apporte une aide précieuse à travers le calcul des structures en béton armé qu'il imaginé.

Le début de carrière de Niemeyer était caractérisé par l'utilisation des formes puristes du style international, car fraîchement diplômé il s'inspirait de Le Corbusier, en utilisant une volumétrie cubique et prismatique à travers des parallélépipèdes de différentes proportions et disposition tels que : Maison Henrique Xavier à Rio 1936, Obra do Berçao (1937-1940) (Planche 4, figure 19), Siège des Empresas Graficas o Cruzeiro à Rio (1949-1950) (Planche 4, figure 20), ainsi que le Casino Pampulha (1940-1942) (Planche 4, figure 21). Ainsi il proclame son appartenance au mouvement moderne à travers la purification du volume et en cherchant la forme lisse et homogène, à l'exception du siège de Mondadori (1968-1975), un bâtiment-pont à arcades immenses d'un rythme musical (Planche 4, figure 22) et l'immeuble FATA European Group à Turin (1975-1979) (Planche 05, figure 23), où il reproduit le même principe avec des modules tendus cette fois-ci.

L'immeuble Copan à Sao Paulo (Planche 4, figure 24), fut le début de la manifestation de ses formes curvilignes, à plan ondulé ou arqué, ce qui fait que les façades suivent la forme et l'épousent. Désormais il utilise des cylindres des dômes et des coupoles dans ses projets ; bien que l'imbrication de forme cylindrique soit permise dans le mouvement moderne, elle reste toutefois discrète, Niemeyer, lui assume totalement la forme, comme dans La Casa do Baile « La salle de bal » à Pampulha (1940-1942), tirant ainsi une valeur symbolique du cercle, où les mouvements de denses induisent des mouvements circulaires (Planche 4, figure 25), l'Hôtel Nacional (National) (1968-1970) et l'immeuble de logement Barra Tijuaca (1973-1982) où l'on

retrouve la valeur symbolique du cercle, qui incite à se rassembler et à faire le cercle (Planche 4, figure26).



Figure 14 : Ministère des relations extérieures à Itamaraty

Source : <http://www.flickriver.com/photos/>



Figure 15 : Ministère de la justice

Source : <http://adveniat-regnum-tuum.blogspot.com>



Figure 16 : Le Ministère des Armées (1968-1972), Source : <http://curieuxdumonde.fr>



Figure 17 : le mémorial Juscelino Kubitschek (1980-1981)

Source : www.mimoa.eu

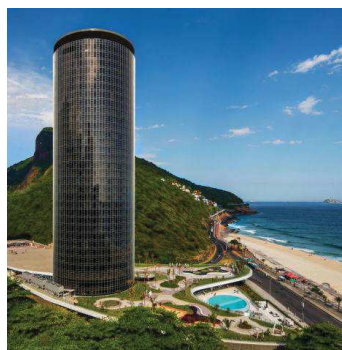


Figure 18 : l'hôtel national (1968-1970)

Source : <http://www.yonder.fr/>



Figure 19 : Obra do Berçao (1937-1940)

Source : www.archdaily.com.br

Planche 04 : Principales réalisations de Niemeyer au Brésil entre 1960-1970.

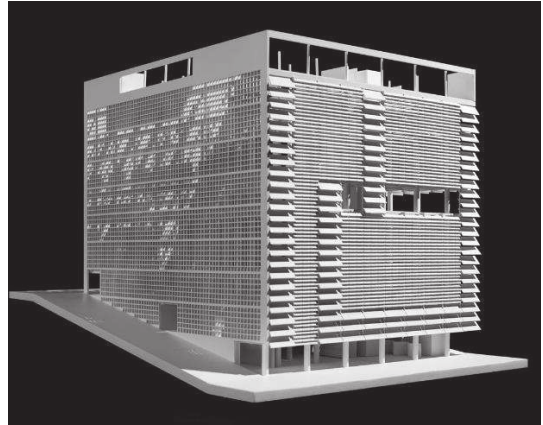
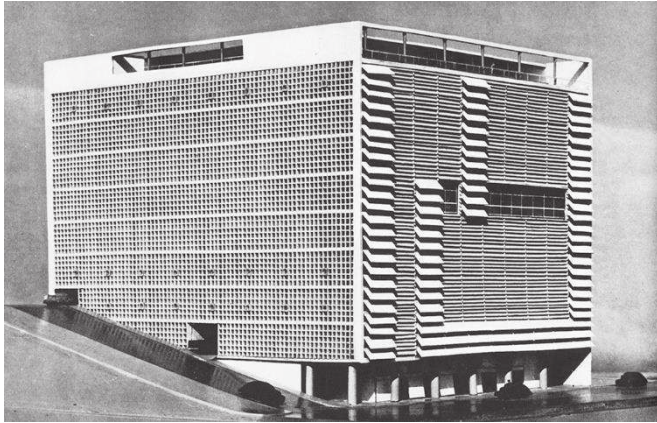


Figure 20 : Siège des Empresas Graficos o Cruzeiro à Rio (1949-1950)

Sources : www.designspiration.net/save/120670470970/

www.pinterest.com/boodiline



Figure 21 : Casino Pampulha (1940-1942), Source : www.pinterest.com/pin/443886106995638464/



Figure 22 : siège de Mondadori (1968-1975) Source : www.pinterest.jp/pin/477311260486385526/

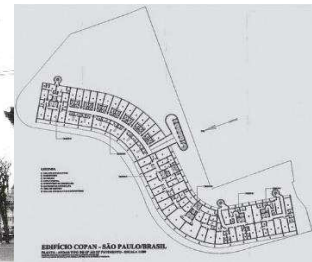
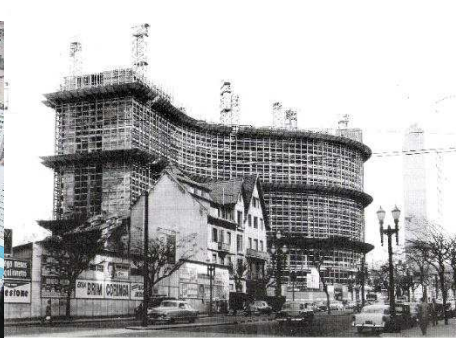


Figure 24 : L'immeuble Copan à Sao Paulo

Sources : <http://contour.epfl.ch/?p=748&lang=en> www.pinterest.com/pin/53

Planche 04 : Principales réalisations de Niemeyer au Brésil entre 1960-1970.

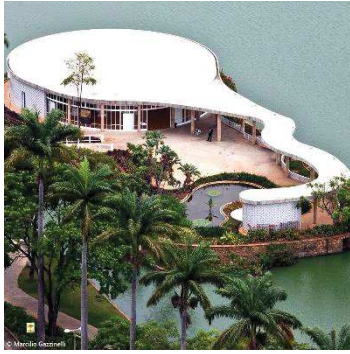


Figure 25 : La salle de bal à Pampulha (1940-1942)

Source : www.amc-archi.com/photos/pampulha-de-niemeyer-au-patrimoine-mondial-de-l-humanite,5388/ensemble-moderne-de-pampulha.1

Figure 26 : l'immeuble de logement Barra Tijuaca (1973-1982)

Source : www.alamyimages.fr



Planche 04 : Principales réalisations de Niemeyer au Brésil entre 1960-1970.



Figure 23 : l'immeuble FATA European Group à Turin Italie (1975-1979)

Source : http://www.festivalarchitettura.it/fa5_2013/festival/En/Magazine_Detail.asp?ID=130&pmagazine=1

Source : http://www.festivalarchitettura.it/fa5_2013/festival/En/Magazine_Detail.asp?ID=130&pmagazine=1

Planche 05 : Les réalisations de Niemeyer en Italie entre 1960-1970.

3. Les principes de l'architecture d'Oscar Niemeyer :

En nous basant sur les ouvrages publiés sur l'architecture de Niemeyer, tel que « *Oscar Niemeyer, une esthétique de la fluidité* » par Gilbert Luigi, ou encore « *Niemeyer par lui-même* » par Edouard Balby, nous constatons que l'architecte dans la majorité de ses œuvres utilisent des principes propres à lui.

L'un des principes de Niemeyer est qu'il associe couverture et couvrement, lorsqu'il s'agit de coupole, tel est le cas dans : le musée de l'Aviation du parc Ibirapuera (Planche 06, figure 27), faisant référence à la voûte céleste. Le Palais des congrès à Brasilia (1958-1960) (Planche 06, figure 28), avec le Siège du parti Communiste français (1965-1968), présentant tous deux un dôme posé à même le sol ayant une faible hauteur et une base large qui s'évase au contact du sol, ayant une symbolique matérialiste qui fait référence à la vocation internationale du mouvement communiste. Il faisait également recours à des voûtes en tunnel ; afin de recouvrir d'un seul jet un espace, des voûtes minces en béton sous forme de tunnel à faible courbure parabolique : c'est le cas du Club de jeunes à Diamantina 1950, le Gymnase scolaire à Campo Grande (1953-56) et le club libanais à Belo Horizonte 1955. Nous retrouvons des voûtes en tunnel tronconique à section parabolique et plus resserrées de l'église Sao Francisco de Assis à Pampulha (1940-1944) (Planche 06, figure 29), qui constituent l'exception de cette série. Néanmoins, elles ont une forte symbolique ; la voûte principale contient la nef centrale, les autres 4 voûtes sont plus petites et couvrent le chœur et les annexes et dessinent au sol la croix des églises traditionnelles avec : nef, transept, et chevet, il se démarque clairement des pionniers de mouvement moderne.

Dès les années 1960, les voûtes en tunnel qui autre fois étaient l'un des axes de la recherche plastique de Niemeyer du point de vue structurel ; afin de pouvoir intégrer les volumes courbes complexes dans le langage moderniste ; laissent alors place aux coques sur plan triangulaire ou encore sur plan trapézoïdal avec des points d'appuis restreints. Le Centre sportif de Brasilia 1961 et l'Université de Constantine (1969-1972), où les métaphores organiques –aile d'oiseau- ou encore mécanique –le parapluie-, sont alors représentées dans cette structure autoportante dans une forme spectaculaire en gardant une légèreté incroyable. C'est une structure tellement bien maîtrisée par les ingénieurs, car elle reflète la finesse des profils et l'élégance des combures.

Cependant, il existe quelques cas de voûtes asymétriques, à travers le cas de la Couverture des tribunes érigées sur l'esplanade du ministère des Armées à Brasilia (1968-1972) , une voûte mince, au galbe très ferme vu de profil, symbolisant l'ennoblissement de l'état-major pour stimuler les troupes manœuvrant sur la place (Planche 06, figure 30). Cette forme apparaît vingt ans plutôt dans un de ses projets à Rui Barbosa à Rio en 1949, qui devait abriter le buste sculpté du célèbre écrivain national. La coque est alors sous forme de rotondité allongée, dominée par un obélisque à quelques mètres en avant (Planche 06, figure 31).

Son recours au symbolisme et aux formes libres, a fait que ses travaux soient fortement critiqués, comme pour l'auditorium du Lycée Belo Horizonte (1954-1956), où la banalité fut frôlée, non pas dans la morphologie mais dans la symbolique, avec la reprise du stylo et de la règle, l'équilibre instable que génère le volume à son contact avec le sol par son unique surface inférieure convexe (Planche 06, figure 32). Toutefois cette étape fait partie de son évolution,

car si l'on place cette construction dans la typologie volumétrique de Niemeyer, il est plus que clair que ça fait partie de sa recherche plastique sur les voiles courbés en béton. Les plans et profils sont loins d'être complémentaires dans ce cas, car le plan est de forme trapézoïdale organique tandis que le profil est sous forme de navette.

Or, ce n'est pas toujours le cas, car ses projets peuvent aussi rendre les constructions avoisinantes banales, nous citons l'auditorium de la Bourse du travail à Bobigny (1972-1982), qui symboliquement rend hommage au monde ouvrier et du syndicalisme ; représenté par une coque en béton. Toute en courbe sous forme d'éventail rebondi, occupant une large surface, il apparaît comme un phénomène géologique, créant ainsi un rythme dynamique (Planche 06, figure 33). Définie comme événement plastique dans un site indécis, qui ne fait qu'accentuer la banalité des constructions voisines.

Cependant sa recherche plastique ne se limitait pas uniquement aux systèmes de couverture, ou de parois mais, elle allait au-delà arrivant jusqu'aux éléments porteurs. C'est à partir de la construction de l'Obra do Berço (1937-1940) (Planche 06, figure 34) à Rio, qu'il a commencé à employer les pilotis cylindriques, et ceci jusqu'aux années quarante et cinquante pour différentes catégories de constructions. La salle de bal de Pampulha (1940-1943) (Planche 06, figure 35), la bibliothèque de Belo Horizonte 1955 où le grand corps de bâtiment est traversé de haut en bas de pilotis placés en retrait de l'enveloppe comme le dicte le principe du style international (Planche 06, figure 36), ou encore dans la maison de l'architecte à Canoas (1953-1954) où il a utilisé des pilotis frêles ou plutôt des poteaux en métal supportant la grande dalle qui sert aussi de couverture (Planche 06, figure 37). Sans pour autant déranger le passage de la lumière, notamment le Brasília Palace Hôtel, Niemeyer avait posé sur une double rangé de pilotis fins d'où l'impression d'une image aérienne.

Avec Niemeyer les pilotis perdent la banalité à travers les différentes mises en œuvre qu'il leur donne, qu'ils soient réguliers ou pas, ces derniers ont une relation avec les masses des bâtiments, de leur dimensions, de leur transparence, du rythme ou encore du sol. Cela apparaît lorsque nous confrontons la salle de bal de Pampulha, la maison Morais à Rio 1943, la maison de Canoas et la banque Baovista 1946 à Rio (Planche 06, figure 38), où il avait utilisé des pilotis en béton armé, et le plus souvent en métal avec une minceur délicate à valeur symbolique dans le langage moderniste. Un élément architectonique qui traduit un expressionisme structurel, il n'a de fonction plastique seulement lorsqu'il est sous forme de portique ou de péristyle ou entre autres lors des répétitions. Quant aux piliers, ils sont moins utilisés par Niemeyer, à l'université de Brasília (1960-1963), il les a employés tout le long des sept cents vingt mètres de façade (Planche 06, figure 39) pour les deux bâtiments arqués. Malgré cette longueur, l'édifice est loin de prétendre à la monumentalité, utilisant un procédé de construction très modeste et une mise en œuvre d'une grande simplicité.

La structure du siège de l'Institut des architectes de Brasília 1970, est plus ambitieuse, constituée de quatre piliers puissants de section trapézoïdale, étroits et reliés au sommet par une dalle-toiture. Le corps du bâtiment principal est à mi-hauteur accroché entre les piliers, ce qui nécessite un effort considérable, car il cherche à exprimer la monumentalité dans un édifice de dimensions modestes.

Cherchant à faire apparaître les pilotis, Niemeyer passe par une étape d'essais des pilotis en V à deux branches symétriques d'égal diamètre. Nous les retrouvons dans l'un des supports métalliques ultra-minces de l'auvent de l'entrée du Casino de Pampulha (1940-42) (Planche 06,

figure 40), le même type mais cette fois arqué est retrouvé dans la chapelle de Sao Francisco (Planche 06, figure 41); ces deux types seraient inspirés des pilotis qui soutiennent l'auvent de l'entrée de la Villa Stein 1927 à Garches par Le Corbusier (Planche 06, figure 42), mais Niemeyer cherche à s'en démarquer et à prouver sa capacité d'innovation. Il en va de même pour le palais des Nations (Planche 06, figure 43) et celui des Etats 1951 à Sao Paulo (Planche 06, figure 44), constitués de pilotis à deux branches fuselées, s'écartant en triangle, avec des branches obliques à 60° reprenant en console la charge du porte-à-faux.

Son innovation plastique ne cesse de se manifester, cette fois dans la modulation plastique dans l'immeuble de logement et de commerce Conjunto Juscelino Kubitschek à Belo Horizonte 1951 avec des façades galbées, démarrant du sol pour s'évaser ensuite avec vigueur avant de s'élever pour enfin s'achever en deux branches symétriques, encadrant une troisième médiane. La répétition de cet élément engendre une expression plastique (Planche 06, figure 45). Puis vient le tour des pilotis en V prononcé, sans branche intermédiaire de galbe arrondi et fuselé, dans l'Hôpital Sul América à Rio 1952 (Planche 06, figure 46), chacune des deux branches est reliée à un élément structurel vertical le long des neuf étages, ce qui fait que l'écartement entre les branches corresponde à une travée.

Les supports les plus originaux sont apparus à Brasilia, la première nouveauté se manifeste dans le rôle architectonique à travers la position ; soutenant la dalle très débordante du toit et celle du premier niveau qui se trouve à environ un mètre cinquante au-dessus du sol au palais de l'Aurore (1957-1959) (Planche 06, figure 47), et à la cour suprême (1958-1960) (Planche 06, figure 48) ; au palais Panalto (1958-1960) (Planche 07, figure 49). Le plancher se trouve à quatre mètres du sol, porté par des pilotis cylindriques, peu visibles de l'extérieur, les éléments porteurs et portés s'articulent finement que leur contacte parait réduit à un point. Au palais de l'Aurore les supports se rejoignent en formant des arcades renversées, façonnées comme une membrane tendue en surface, galbées suivant une armature orthogonale.

L'aboutissement ultime du principe constructif des pilotis est les mâtures, dans le but de libérer l'espace sous le bâtiment, il consistait en une structure portante bipode comme un mât qui peut supporter de très larges porte-à-faux croissant de bas en haut. Ainsi est le cas dans le projet pour l'exposition Barra 1972 à Rio, qui propose cinq plateaux carrés, le plus bas se trouve à quelques mètres du sol, ce qui donne un pyramide régulière renversée sur son sommet. Le même principe est appliqué en 1974 dans un projet regroupant trois musées à savoir, celui de la terre, de la mer et du Cosmos, sauf que cette fois les plateaux sont réduits à deux ou trois selon le besoin. En revanche le centre musical projeté (1968-1973) à Rio, est de plan rectangulaire, ce qui fait un parallélépipède suspendu à une dizaine de mètres au-dessus du sol par un double éventail de haubans fixé par deux piles de béton formant le noyau vertical.

Un autre élément caractéristique de l'architecture de Niemeyer est bien l'emploi des arcades. En 1962 une nouvelle série de palais voit le jour à Brasilia, il s'agit du ministère des Relations extérieures dit « Itamaraty » (Planche 07, figure 50) et celui de la Justice (Planche 07, figure 51), et ceci à travers l'emploi des arcades en plein cintre. Itamaraty est une boîte en verre posée sur un bassin entourée d'une cage d'arcades en béton ébrasées vers l'extérieur, les piédroits ne sont que de simples lames verticales ayant la même hauteur que le bâtiment, les arcs sont maintenus par le couronnement, la rythmique verticale, l'épaisseur des piédroits ainsi que le béton brut créent une modénature élégante en plus du jeu de reflet sur le bassin d'eau, ce qui exprime l'évolution du vocabulaire architectural de Niemeyer vers un vocabulaire plus

dépouillé avec des références classiques. Dans le palais de la justice le nombre d'arcade est de neuf isolés en façade principale, arc et piédroits sont placés de la même manière que la précédente, or sur ces arcades Niemeyer place des gargouilles géantes, ce qui engendre la mise en scène du bâtiment par l'eau ruisselante sur la façade. Dans le siège des éditions Mondadori 1968 près de Milan (Planche 07, figure 52), le même type d'arcades est repris, elles sont au nombre de quarante-quatre réparties symétriquement sur les deux façades principales d'une longueur de deux cents mètres, de six largeurs différentes et se combinent de façon aléatoire, ce qui produit une perception séquentielle à l'intérieur des arcades. D'une taille inférieure à la précédente le bâtiment FATA European Group (1975-1979) à Turin, d'une image forte et harmonieuse due à la modulation en arcs, piédroits et piles. Les arcades disposent d'une ouverture unique avec des arcs en anse de panier, disposés selon la formule rythmique suivante 2+3+3+2, le passage d'un groupe à un autre est marqué par l'une des trois piles (Planche 07, figure 53), lui procurant cet aspect de pont. En effet les piédroits s'intercalent entre les piles d'un bout à l'autre du bâtiment pour s'interrompre au niveau du plancher du premier étage.

L'escalier est un élément amoindri dans le mouvement moderne réduit à son utilisation fonctionnelle et à l'espace intérieur, tandis que dans l'espace extérieur on lui préfère les rampes. Niemeyer les emploie aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur, la grande salle de jeu du casino de Pampulha (1940-1942) (Planche 07, figure 54), qu'il dessine sa première rampe intérieure, à peu près au centre du volume desservant les deux niveaux de mezzanine en deux volets droites tournant à retours, considérée comme l'événement architectural de cette salle, peut être un hommage à la villa Savoye. Etant donné que la rampe courbe possède par nature un aspect plus spectaculaire que la rampe droite, le registre change complètement dans le palais de l'industrie du parc Ibirapuera à Sao Paulo (Planche 07, figure 55) qui abrite un système de deux doubles rampes en fer à cheval supportées par un pilier arboriforme à quatre branches formant la continuité dynamique des espaces en engendrant des perspectives contrastées.

A travers l'évolution du vocabulaire de Niemeyer ; nous constatons que les recherches plastiques rompent avec le vocabulaire formel du fonctionnalisme international, et puise le symbolisme dans le monde de l'industrie et de la nature qui redevient le modèle morphologique en cherchant les prouesses de la technologie qui se fait conjuguée avec les attributs de la forme géométrique.

Dès lors, nous pouvons constater que Niemeyer dans ses projets a recours à certains principes usuels que l'on retrouve dans la majorité de ses réalisations. Ce sont :

1. Les pilotis allongés et arqués.
2. Les pilotis composites.
3. Les galeries à arcades élancées.
4. Les mâtures.
5. Les rampes.
6. Les tonnelles.
7. Les lacs artificiels.
8. La métaphore spatiale.

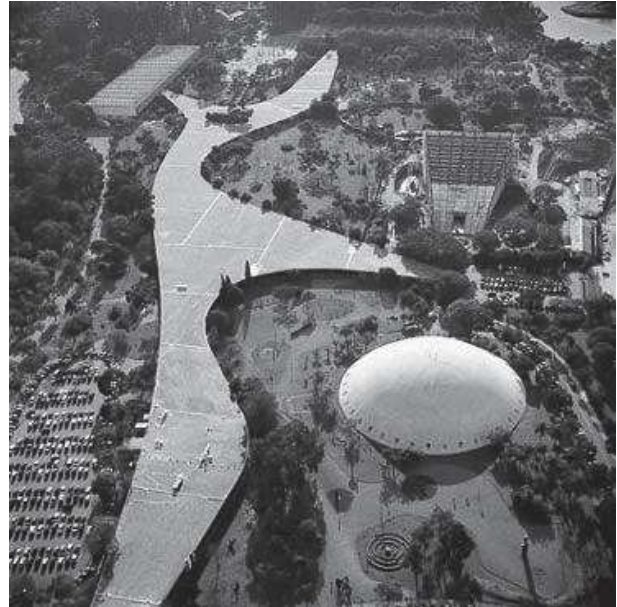


Figure 27 : le musée de l'Aviation du parc Ibirapuera

Sources : <http://www.traveladventures.org/continents/> www.pinterest.com/pin/402650022905950493



Figure 28 : le Palais des congrès à Brasilia (1958-1960)

Sources : rancoisweigel.blog.lemonde.fr

www.maison.com/architecture/histoire/

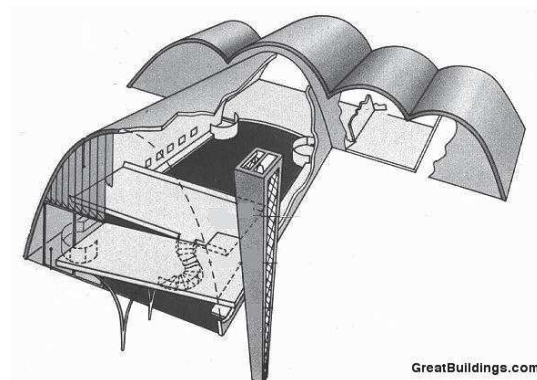
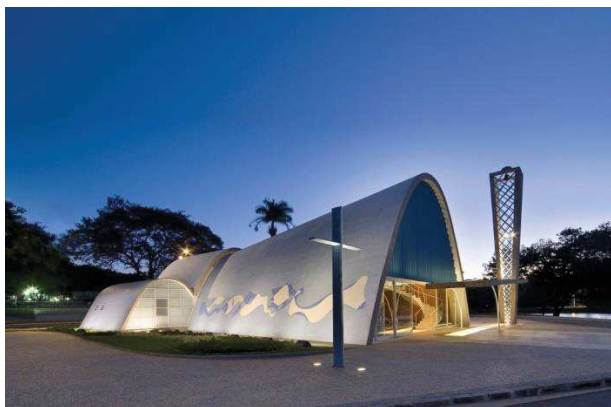


Figure 29 : l'église Sao Francisco de Assis à Pampulha (1940-1944)

Sources : fr.wikiarquitectura.com/bâtiment/

fr.wikiarquitectura.com/bâtiment/

Planche 06 : Principe de couverture et de couvrement chez Niemeyer.



Figure 30: Couverture des tribunes érigées sur l'esplanade du ministère des Armées à Brasilia (1968-1972)

Source : <http://curieuxdumonde.fr>

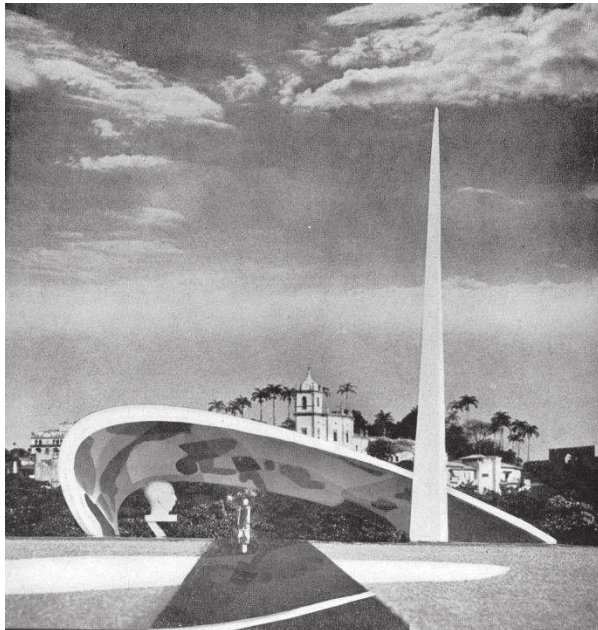


Figure 31: le buste sculpté du célèbre écrivain national

Source: mdc.arq.br/2009/01/28/de-obeliscos-e-espetos/



Figure 32: l'auditorium du Lycée Belo Horizonte (1954-1956)

Source : Gilbert Luigi, « Oscar Niemeyer une esthétique de fluidité », Editions Parenthèses, 1987, Marseille.



Figure 33: l'auditorium de la Bourse du travail à Bobigny (1972-1982)

Sources : patrimoine.seinesaintdenis.fr/bourse-departementale-du-travail

Planche 06 (suite) : Principe de couverture et de couvrement chez Niemeyer.



Figure 34: Pilotis de l'Obra do Berço (1937-1940)

Source : <http://www.festivalarchitettura.it>



Figure 35: Pilotis de la salle de bal de Pampulha (1940-1943)

Source : whc.unesco.org/fr/list/1493



Figure 36: Pilotis de la bibliothèque de Belo Horizonte 1955

Source : www.robertharding.com



Figure 37: Pilotis la maison de l'architecte à Canoas (1953-1954)

Source : fr.wikiarquitectura.com/bâtiment/maison-des-canoas/



Figure 38: Pilotis de la banque Baovista 1946 à Rio
Source : <http://arqguia.com/obra/banco-boa-vista/?lang=ptbr>



Planche 06: Les pilotis comme éléments porteurs



Figure 39 : Pilotis l'université de Brasilia (1960-1963)

Source : florettenobrasil.wordpress.com



Figure 40 : Pilotis en V de l'auvent de l'entrée du Casino de Pampulha (1940-42)

Source : designkultur.wordpress.com



Figure 41 : Pilotis en V arrondi dans la chapelle de Sao Francisco

Source : fr.wikiarquitectura.com/batiment/



Figure 42 : Villa Stein 1927 à Garches par Le Corbusier

Source : www.docomomo.fr/batiment/villa-

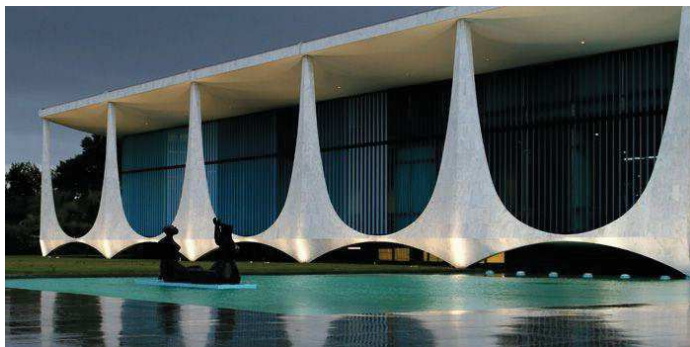


Figure 43 : le palais des Nations

Source : culturebox.francetvinfo.fr



Figure 44 : le palais des Etats 1951 à Sao Paulo

Source : fr.wikipedia.org/wiki/Palais_du_Planalto

Planche 06 (suite) : Les pilotis comme éléments porteurs

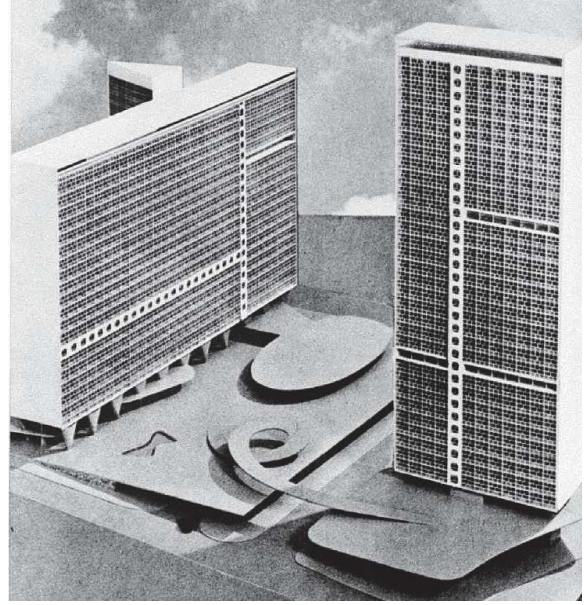


Figure 45 : Les pilotis l'immeuble de logement et de commerce Conjunto Juscelino Kubitschek à Belo Horizonte 1951

Source : <https://www.pinterest.com/jbdeboisseson/tropical>

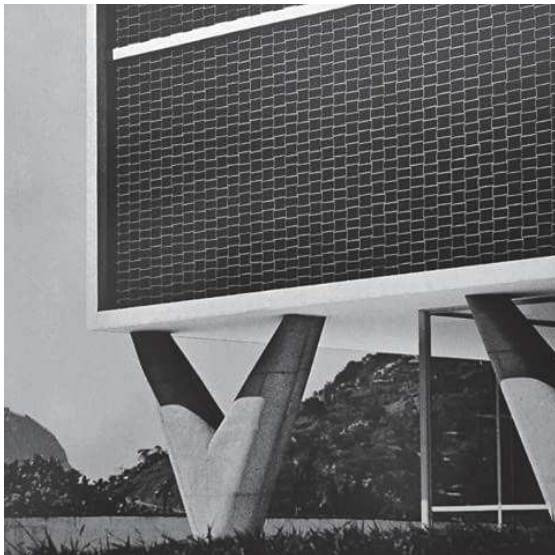


Figure 46 : Les pilotis de l'Hôpital Sul América à Rio 1952

Source : www.pinterest.com/jbdeboisseson



Figure 47 : palais de l'Aurore (1957-1959)

Source : www.urbanews.fr



Figure 48 : palais de la cour suprême (1958-1960)

Source : usbeketrica.com/article/brasilia-l-ex-capitale-du-futur

Planche 06 (suite) : Les pilotis comme éléments porteurs, cas des portiques arqués et en « V »



Figure 49 : palais Panalto (1958-1960)

Source : /www.expedia.ca/fr/Palais-Du-Planalto



Figure 50 : palais du ministère des Relations extérieures dit « Itamaraty »

Source :maguelonnegoroux.wordpress.com/2014/06/18/brasilia-30-mai-2014/



Figure 51 : palais de la Justice

Source : abduzeedo.com/node/25609



Figure 52 : siège des éditions Mondadori 1968 près de Milan

Source : www.livreshebdo.fr



Figure 53 : bâtiment FATA European Group (1975-1979) à Turin

Source :http://www.festivalarchitettura.it/fa5_2013/festival/En/Magazine_Detail.asp?ID=130&pmagazine=1



Figure 54 : Rampe de la grande salle de jeu du casino de Pampulha (1940-1942)

Source : gypichard-bzh.fr/OSCAR-NIEMEYER



Figure 55 : Rampe du palais de l'industrie du parc Ibirapuera à Sao Paulo

Source : fr.wikipedia.org/wiki/Biennale_de_São_Paulo

Planche 07: Les arcades et les rampes.

Chapitre II :

L'approche architecturale de Niemeyer par la géométrie non euclidienne.

I. Aperçu sur Les deux types de géométrie :

1. La géométrie euclidienne :

C'est l'étude des figures usuelles du plan telle que les droites, les segments, les mesures des angles, et des aires¹⁵. Son nom lui vient d'Euclide qui a défini les axiomes ou les postulats que vérifie la géométrie usuelle dite « euclidienne ». Le plus célèbre des axiomes est celui des parallèles : « Deux droites sont parallèles si elles sont distinctes et ne se croisent jamais ».

Tout au long du 19^{ème} siècle, on s'est aperçu qu'il y'avait d'autres géométries en dehors de la géométrie euclidienne.

Postulats d'Euclide :

Quelques définitions s'imposent à nous, avant d'élaborer nos démonstrations :

Définition du terme « Postulat »:

- C'est une proposition que l'on demande d'admettre avant un raisonnement, que l'on ne peut démontrer et qui ne saurait être mise en doute. (LAROUSSE 2018)
- La différence entre Postulats et axiomes :

« Nous admettons dans les axiomes telles choses évidentes d'elles-mêmes pour la connaissance et à la portée de nos intelligences non enseignées ; tandis que dans les postulats, nous demandons d'admettre telles choses faciles à procurer, sur l'admission desquelles l'esprit n'est pas en peine et qui n'ont besoin ni d'artifice ni de construction. »¹⁶

Ceci est le cas pour les quatre premiers postulats, mais on ne peut pas dire autant du cinquième qui concerne les parallèles.

Postulat 1 : Un segment de droite peut être tracé, en joignant deux points quelconques.

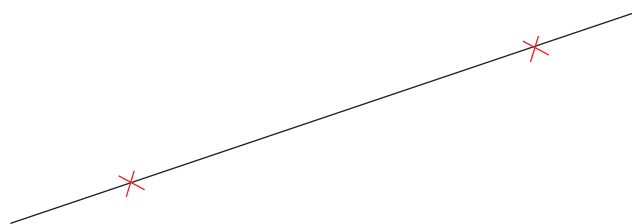


Figure 56 : postulat 01

Source : Auteur

¹⁵ François Fillastre Université de Cergy-Pontoise.

¹⁶ Proclus, dans ses « Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide (Ve siècle) »

Postulat 2 : Tout segment est prolongeable en une droite.

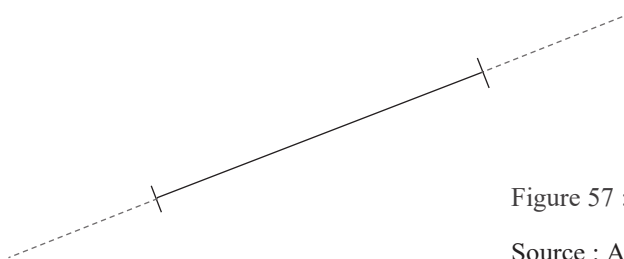


Figure 57 : postulat 02

Source : Auteur

Postulat 3 : Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.

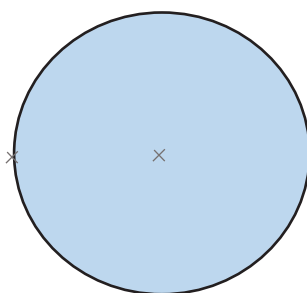


Figure 58: postulat 03

Source : Auteur

Postulat 4 : Tous les angles droits sont congruents.

Postulat 5 : Si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

La forme la plus connue est commune : Par un point donné hors d'une droite, on peut mener **une et une seule** parallèle à cette droite.

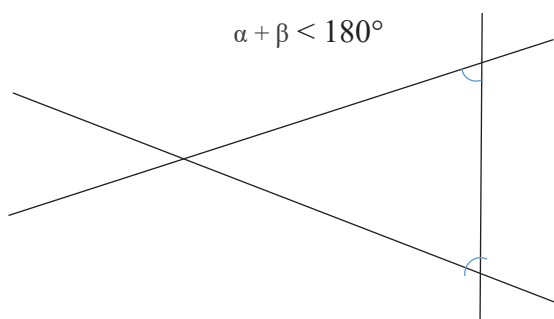


Figure 59 : Postulat 05

Source : Auteur

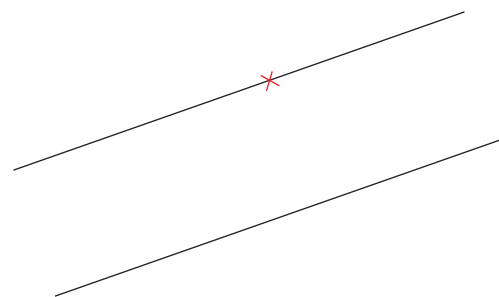


Figure 60 : Postulat 05, formule commune

Source : Auteur

2. La Géométrie non euclidienne :

2.1 Historique de son évolution :

Les postulats d'*Euclide* étaient rigoureux, mais les esprits critiques se demandaient ce qu'il adviendrait si l'un des postulats n'était pas vrai, ou si on le remplaçait par un autre plus général, c'est aux environs de 1813, que certains géomètres pensent à une nouvelle géométrie qu'ils nomment « anti-euclidienne », « astrale » ou encore « non euclidienne » où ils écartent le Postulat d'*Euclide*.

Dans ses *Eléments*, *Euclide* a perçu les difficultés cachés dans la théorie des parallèles : « *Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.* »¹⁷. Il est alors possible que ce dernier ait pensé à examiner l'hypothèse contraire, où les deux droites ne se rencontrent pas forcément, et l'ait rejetée en raison de sa forte complication. Son postulat reste qu'une simple hypothèse.

Le *Postulatum* était un objet de discussion et de recherches chez les géomètres grecs des Ecoles d'Alexandrie et d'Athènes. *Proclus*¹⁸ rapporte les démonstrations des différents géomètres tel que : *Posidonius*, *Geminus*, *Tolomeus* et en ajoute lui-même mais sans succès, plus tard les mêmes préoccupations voient le jour chez les Arabes *Naser-Eddin*, *Al-Narizi* ainsi que chez les savants de la renaissance en raison du commentaire de *Proclus* quant à la question des parallèles.

La majorité s'appuie sur le concept d'équidistance. Ce dernier dit que : « *soit en admettant l'existence de droites coplanaires équidistantes, soit en supposant que deux droites non équidistantes s'écartent d'un côté pour se rapprocher de l'autre* »¹⁹ ; afin de prouver que la ligne équidistante d'une droite est une droite.

Saccheri, *Lambert* et *Taurinus* bien que convaincus que le postulat soit vrai, ils tentent de le démontrer tant bien que mal et en ayant la curiosité de voir ce qu'il adviendra lorsqu'ils le mettent de côté, c'est ainsi qu'ils tombent sur les caractéristiques de la géométrie générale. *Saccheri* tente de démontrer le cinquième postulat par l'absurde, mais n'aboutit à aucune contradiction. Bien au contraire, partant de *l'hypothèse de l'angle aigu* (somme des angles d'un triangle inférieure à 180°).

Au même moment *Lambert* et *Taurinus* découvrent la forte analogie entre les droites tracées sur un plan et les grands cercles tracés sur une sphère, ils déduisent par la suite qu'il existe une Géométrie qui peut être basée sur le rejet du postulat, tout en n'ayant aucune contradiction logique.

Les échecs vont alors éveiller chez les géomètres l'idée que le postulat doit être indémontrable et qu'il fallait l'admettre sans démonstrations.

¹⁷ Énoncé original exprimé dans le livre des *Éléments* d'*Euclide*.

¹⁸ Philosophe néo-platonicien 412-485.

¹⁹ La géométrie non euclidienne par P. Barbarin, juin 1907, deuxième édition.

Dès 1872, l'objet des recherches de Gauss²⁰ était la question des parallèles, il réfutât quelques années plus tard la « *Theoria Parallelarum* ». Une démonstration faite par *Wolfgang Bolyai*²¹, mais c'est lors de sa correspondance avec *Wachter, Schweikart, Schumacher*, qu'il confirme ses doutes, et en 1813 met en place un projet d'exposition sur la géométrie non euclidienne, mais ne publiera jamais sur le sujet.

Les premiers écrits sur la nouvelle géométrie sont de Nicolas Lobatschewsky et Jean Bolyai. Lobatschewsky l'Euclide moderne, s'occupe dans un premier temps des parallèles puis oriente ses idées vers une géométrie qui nie la parallèle unique. Il fait une lecture publique de ses découvertes puis publie les éléments et le développement de sa doctrine dans plusieurs ouvrages tel que : *Sur les fondements de la géométrie* en 1830, *Géométrie imaginaire* en 1837 et *Pangéométrie* en 1855 dans lequel il publie son système complet. Pour rendre hommage à ses travaux on donne le nom de « *Géométrie Lobatschewskienne* » à ses découvertes. Quant à Jean Bolyai, il fut encouragé par son père ; afin de publier les résultats de ses recherches. Les propositions importantes qui forment la science absolue de l'espace y sont démontrées indépendamment du postulat euclidien.

C'est au tour de Riemann²² de publier une recherche sur une nouvelle voie de la géométrie, sauf que celle-ci fut publiée après la mort de son auteur soit 13 ans après sa lecture devant la société philosophique.

Du passage suivant « ... *l'espace est non pas infini, mais illimité* », vient la possibilité de créer un troisième système géométrique, où l'on démontre sans aucune contradiction que la somme des angles d'un triangle quelconque est supérieure à deux droites.

C'est donc à la moitié du XIXe siècle que **deux nouvelles géométries en plus de la géométrie euclidienne naissent**. En ayant en commun les 4 premiers postulats d'Euclide, tandis que le 5e prend l'une des formes suivantes :

- a. Par un point donné hors d'une droite, on peut mener **une et une seule** parallèle à cette droite.
- b. Par un point donné hors d'une droite, on ne peut mener **aucune** parallèle à cette droite. Ce qui donne naissance à **La géométrie sphérique (ou elliptique)**, où la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180° . Les droites qui représentent ici le plus court chemin d'un point à un autre sont les *grands cercles*, c'est-à-dire les cercles tracés sur la sphère qui ont le même centre que celle-ci. (Riemann)
- c. Par un point donné hors d'une droite, on peut mener **une infinité** de parallèles à cette droite. Il s'agit ici de **La géométrie hyperbolique** où la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° . **Poincaré**²³ en a donné plusieurs modèles, dont le disque qui porte son nom. (Gauss)

²⁰ 1777-1855, mathématicien, astronome et physicien allemand.

²¹ 1775-1856, mathématicien hongrois transylvain, connu grâce à ses travaux et ceux de son fils János Bolyai en géométrie.

²² Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826-1866, mathématicien allemand.

²³ Henri Poincaré 1854-1912, mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français.

Dès lors, de nombreux savants se lancent dans les nouvelles voies de la géométrie, et réalisent des travaux remarquables tel que : Beltrami²⁴ et De Tilly²⁵. Beltrami en 1868 prouve que la planimétrie de Lobatschewsky est réalisée sur une surface particulière, la pseudo-sphère, puis viennent les conceptions remarquables réalisées par De Tilly. C'est à ce dernier que l'on doit le théorème capital : il n'existe pas d'autres systèmes de géométrie, en dehors des trois géométries citées précédemment. Chaque système est admissible indépendamment des deux autres. Il admet la notion de distance comme notion première en reprenant l'idée de Cauchy, et prouve ainsi par des raisonnements irréfutables, que les trois géométries peuvent être dérivées de cette notion-là.

En effet théoriquement les systèmes de géométries possibles sont infinis, bien que généralement ils sont classés en trois classes, où le principe de la parallèle unique n'est vrai que dans un des groupes. Dans le second, il y'a deux parallèles et dans le troisième le parallélisme est impossible.

« Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode »²⁶

2.2 Contenu et méthodes :

a) Géométrie sphérique ou elliptique :

Ce type de géométrie s'intéresse à la surface bidimensionnelle d'une sphère. Ses concepts de base sont les points et les droites. Les points gardent leur sens usuel, tandis que les équivalents des droites deviennent des géodésiques qui définissent le chemin le plus court entre les points, représentés par de grands cercles. Les autres concepts géométriques sont semblables à ceux de la géométrie euclidienne.

Les angles sont définis à partir des croisements entre les grands cercles, ce qui donne naissance à une trigonométrie sphérique, dont la figure de base est le triangle sphérique (figure 61), délimité cette fois par des arcs de grands cercles de cette sphère.

Comme nous l'avons précédemment dit, la somme des angles d'un triangle, en géométrie sphérique, est supérieure à 180° (elle varie de 180 à 540°) entre π et 3π radians. C'est cet excès angulaire qui correspond au signe positif de la courbure de l'espace dans cette géométrie.

Ce qui fait que ce triangle sphérique soit plus « gros » que le triangle euclidien (figure 62), et cela suivant la formule de Girard,

Soit T un triangle sphérique :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \text{aire T}$$

Ce qui fait que la somme des triangles sphérique est $> \pi$

- Preuve de la formule de Girard :

Un digone est un polygone sur la sphère à 2 sommets antipodaux. L'angle à chaque sommet est le même. Appelons-le a. un fuseau horaire sur un globe terrestre est un digone. (Figure 63') On sait que l'aire d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$. L'aire de la sphère de rayon 1 est 4π .

²⁴ Eugenio Beltrami 1835-1900, un mathématicien et physicien italien.

²⁵ Joseph Marie de Tilly 1837 –1906, mathématicien belge.

²⁶ Henri Poincaré 1902

Comme il faudrait $2\pi/a$ fois notre digone pour recouvrir la sphère, l'aire du digone est celle de la sphère divisée par $2\pi/a$, soit

$$4\pi \times a/2\pi = 2a$$

L'aire de l'hémisphère délimitée par la droite délimitant β et γ est égale à l'aire de T et de trois zones, A, B et C (figure 63).

- L'aire de B est l'aire d'un bigone d'angle β moins l'aire de T
- L'aire de C est l'aire d'un bigone d'angle γ moins l'aire de T
- En considérant l'antipodal de T, on peut voir que l'aire de A est aussi l'aire d'un bigone d'angle α moins l'aire de T.

A la fin on a :

$$2\pi = \text{aire T} + (2\alpha - \text{aire T}) + (2\beta - \text{aire T}) + (2\gamma - \text{aire T})$$

D'où

$$\pi + \text{aire T} = \alpha + \beta + \gamma$$

La géométrie elliptique est dérivée de la géométrie sphérique, topologiquement équivalente, qui doit être représentée sur un ellipsoïde (figure 64) au lieu d'une sphère, et exige que la courbe soit positive et ne doit pas forcément être constante.

De ce fait la géométrie sphérique est le modèle le plus simple de la géométrie elliptique, dans laquelle les droites ne sont jamais parallèles, et où l'espace présente en tout point et dans toutes les directions une courbure positive. »²⁷

On considère trois points A, B et C sur une sphère comme représentés par la (figure 63), ainsi que les arcs de grands cercles qui les relient. On note α , l'angle du triangle au sommet A , et de façon analogue pour les autres sommets. On note a, b et c les angles sous-tendus au centre O de la sphère par la partie de grand cercle correspondante. Ainsi a désigne l'angle BOC , etc. Un angle de 2π correspond à un grand cercle entier. Bien entendu les longueurs se déduisent de a, b et c en les multipliant par le rayon de la sphère.

b) La géométrie hyperbolique :

Dans cette géométrie hyperbolique, appelée aussi « selle de cheval », car le théorème de Pythagore n'est plus valable et la somme des angles d'un triangle n'est plus égale à 180° , et donc inférieure à π . Comme pour la précédente géométrie la droite qui définit le chemin le plus court entre deux points sur une surface hyperbole porte le nom de géodésique, les autres concepts géométriques restent les mêmes dans les trois types de géométrie.

Afin de mieux comprendre cette géométrie Lobatchevski, Klein et Poincaré ont créé des modèles de géométrie non euclidienne dans lesquels on peut tracer *une infinité* de parallèles à une droite donnée et passant par un même point. On peut citer, en deux dimensions : le disque de Poincaré, le demi-plan de Poincaré.

- Représentation de Lobatchevski :

Dans ce cas Le "plan hyperbolique" à courbure négative de Lobatchevski, se trouve représenté par l'hyperboloïde à une nappe, qui se trouve être topologiquement équivalent à une demi-sphère, mais la courbure de cette quadrique n'est pas constante : on ne peut y définir une métrique cohérente ni, par conséquent, y développer une trigonométrie.

²⁷ Démonstration faite par : François Fillastre, Université de Cergy-Pontoise.

Il existe une infinité de droites qui, comme d1, d2 et d3, passent par le point M et sont parallèles à la droite D (figure 65)

- **Le disque de Poincaré :**

Le plan hyperbolique est représenté dans un disque, les géodésiques sont les cercles qui sont perpendiculaires aux bords, le demi-cercle passant par le centre du disque représente une vraie droite du plan, ce qui fait qu'il y ait un nombre infini de parallèles qui passent par le même point.

Afin de mieux comprendre ce disque, nous avons joint un article qui traite ce sujet en annexe.

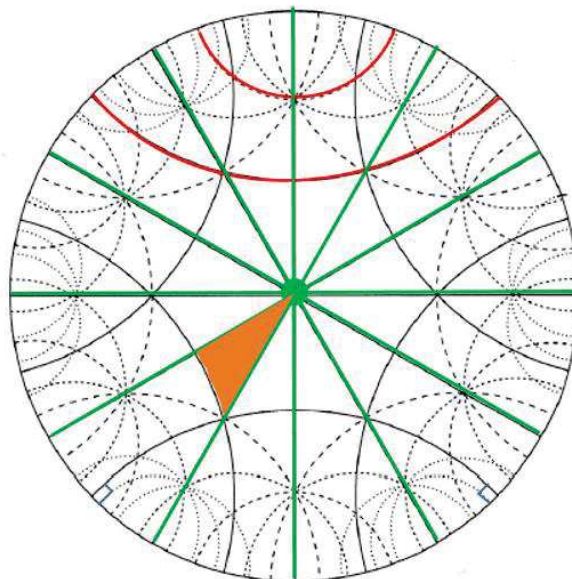


Figure 66 : Disque de Poincaré et ses éléments. Source : Auteur

Légende :					
	Droite		Géodésique		Triangle non euclidien

Les angles représentés ici sont les mêmes que les angles euclidiens, et on peut aussi voir que la somme des mesures des angles d'un triangle est strictement inférieure à π .

Dans le dessin d'Escher (figure 66') le motif du poisson ne cesse de se répéter, ce qui fait que le bord soit à l'infini.



Figure 66' : Dessin d'Escher. Source : www.wikiart.org

Une inversion par rapport au cercle de centre -1 et de rayon $\sqrt{2}$ donne le modèle du demi-plan de Poincaré. (Figure 67)

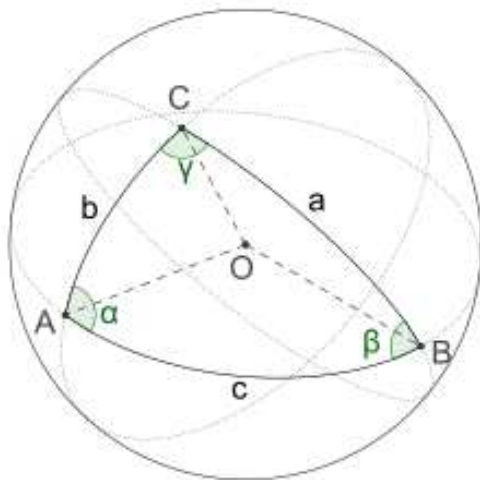


Figure 61 : Triangle sphérique.

Source : Wikipédia

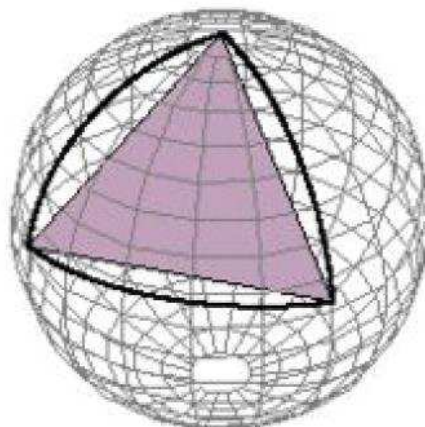


Figure 62 : Triangle sphérique et triangle euclidien.

Source : Les trois géométries, François Fillastre, Université de Cergy-Pontoise

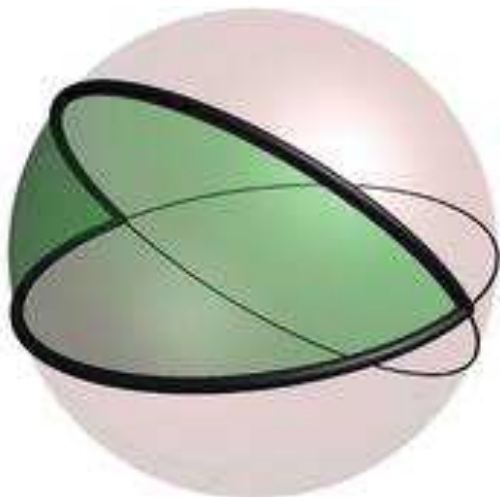


Figure 63' : digone.

Source : Wikipédia

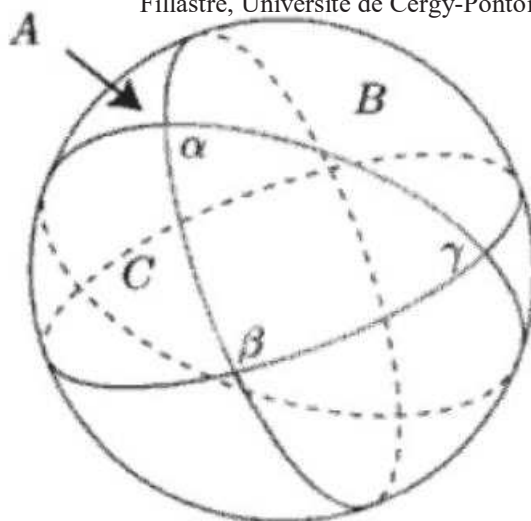


Figure 63 : triangle sphérique.

Source : Wikipédia

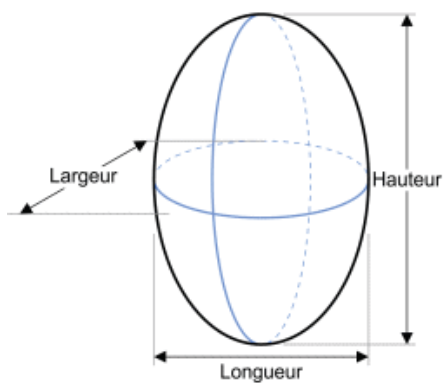


Figure 64 : Ellipsoïde.

Source : www.toutcalculer.com

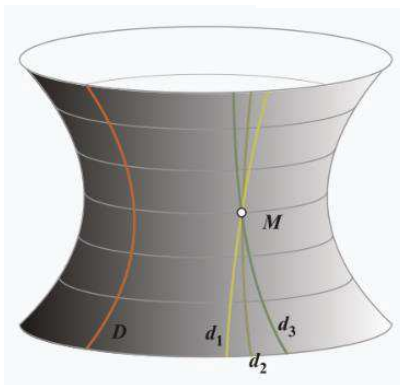


Figure 65 : représentation de Lobatchevski.

Source : www.toutcalculer.com

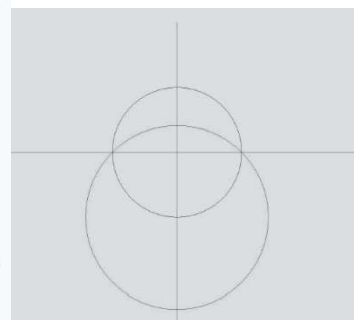


Figure 67 : Demi-plan de Poincaré et ses éléments

Source : Les trois géométries, François Fillastre Université de Cergy-Pontoise

- **Demi-plan de Poincaré :**

« La longueur d'une courbe (C1) entre deux points se calcule comme dans le plan euclidien (on intègre la norme du vecteur dérive), sauf que la norme est divisée par la hauteur »²⁸. (Figure 68)

o **Les droites parallèles :**

Contrairement à la géométrie euclidienne, la propriété de transitivité n'est pas vérifiable ici par contre les droites parallèles ne se coupent toujours pas (la figure 69).

o **Les triangles :**

Dans ce cas il existe deux types de triangles :

- Formé par deux droites et une droite normale (figure 70)
- Formé par trois demi-cercles. (figure 71)

Cependant les triangles ici varient entre 0° et 180° ce qui fait que nous obtenons deux cas de figure :

- A 0° : (figure 72)
- A 180° : (figure 73)

o **Les quadrilatères :**

Ce sont 4 droites qui se coupent deux à deux. Nous retrouvons dans ce cas aussi plusieurs exemples:

- Formé de deux demi-droites et de deux demi-cercles (figure 74)
- Formé avec une seule demi-droite et trois demi-cercles (figure 75)
- Formé par quatre demi-cercles (figure 76)

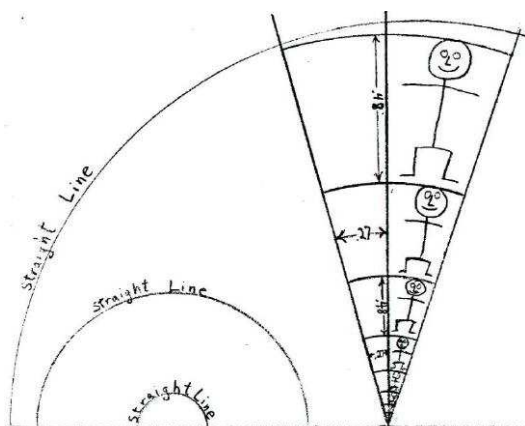


Figure 68 : Calcul longueur d'une courbe.

Source : Les trois géométries, François Fillastre
Université de Cergy-Pontoise

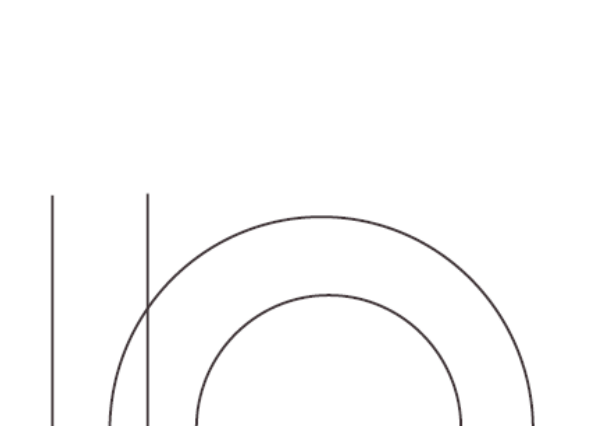


Figure 69 : les droites parallèles ne se coupent toujours pas

Source : Les trois géométries, François Fillastre
Université de Cergy-Pontoise

²⁸ François Fillastre, Université de Cergy-Pontoise.

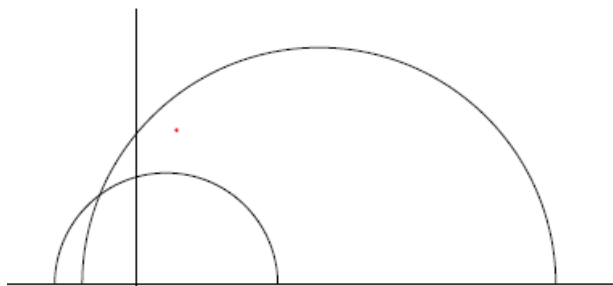


Figure 70: triangle formé par deux droites (géodésiques) et une normale

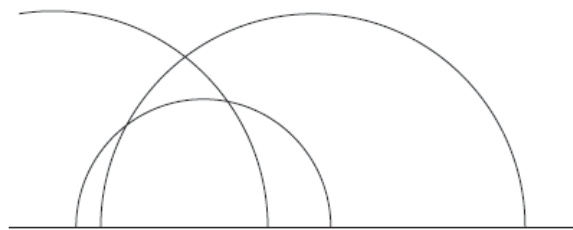


Figure 71 : triangle formé par trois demi-cercles (pseudogéodésiques)

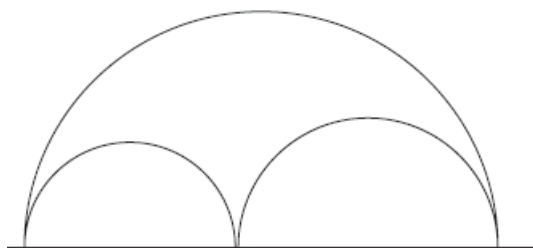


Figure 72 : triangle à 0°

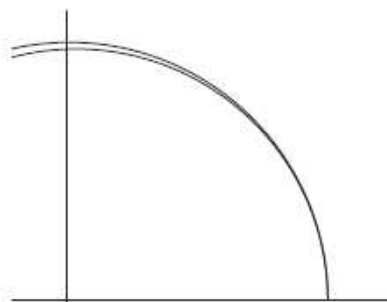


Figure 73 : triangle à 180°

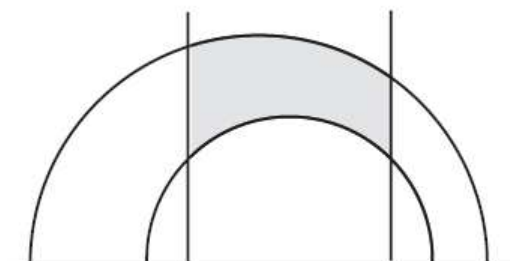


Figure 74 : quadrilatère formé par deux demi-droites et deux demi-cercles.

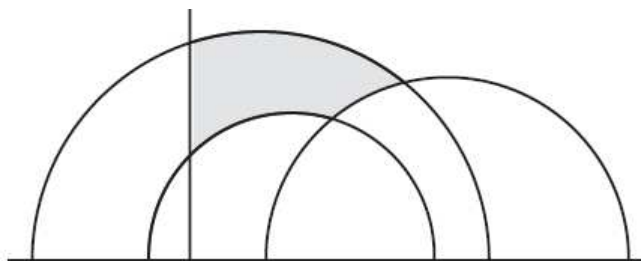


Figure 75 : quadrilatère formé avec une seule demi-droite et trois demi-cercles.

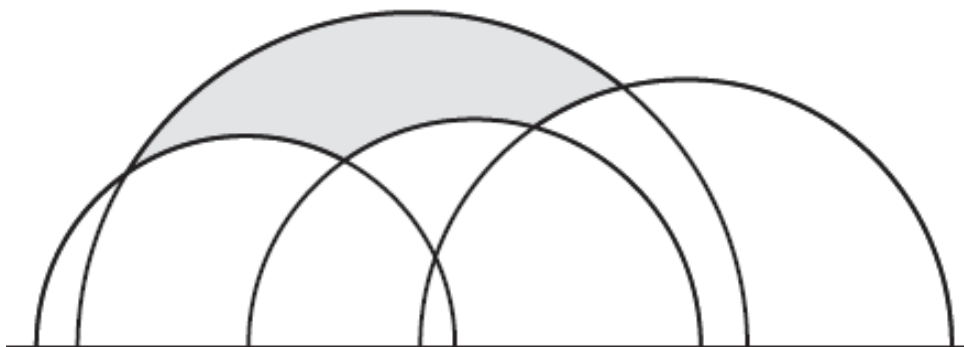


Figure 76 : quadrilatère formé par quatre demi-cercles

Source des figures ci- dessus : *Damien HECQUET et David PELLETIER*

II. Le recours de Niemeyer à la géométrie non euclidienne durant les années 1960 et 1970:

Gilbert Luigi disait à ce sujet que :

« La plastique architecturale de Niemeyer ancre la beauté de la géométrie la plus théorique dans l'esprit d'un lieu ».

Fraichement diplômé, Niemeyer s'est démarqué durant sa recherche plastique de Le Corbusier et de Mies Van der Rohe,, et s'est éloigné des formes puristes simples, en privilégiant la forme organique et en utilisant un matériau qui lui permettait de concrétiser ses idées, en s'inspirant aussi de Picasso, Jean Arp, mais surtout de l'héritage baroque et de la nature de son pays. Après l'inauguration du nouveau ministère de l'éducation et de la santé à Rio, le Brésil proclame sa maîtrise des formes de modernité tout en l'appropriant à l'identité nationale.

La géométrie non euclidienne se manifeste dans l'architecture de Niemeyer dans plusieurs projets. Le premier est celui de la chapelle du palais de l'Aurore (1958-1960) à Brasilia (figure 77), un volume constitué de surfaces à double courbures, bâtie avec deux demi-hyperboloïdes de hauteur et de diamètres différents, afin de dissimuler une enveloppe hélicoïdale, ils sont engagés l'un dans l'autre, symbolisant l'union de la terre et du ciel. C'est ici la concrétisation d'une solution géométrique astucieuse, réalisée trois ans auparavant dans une chapelle.

Parmi les exemples, que nous citons ici, ceux-là :

- Nous retrouvons la cathédrale Nossa-Senhora-Aparecida (1959-1970) à Brasilia (figure 78) aussi, constitué d'un hyperboloïde de révolution constitué de seize nervures avec une ossature effilée et tendue vers le zénith au travers de la couronne symbolisant la vierge, ce qui lui confère une impulsion dynamique, l'attrance vers le haut est irrésistible, tout comme les cathédrales gothiques mais avec une toute nouvelle configuration.
- La maison de la culture du Havre (1970-1982) (figure 79), est constituée de deux volumes sur plan circulaire, un plus plat que l'autre, le premier est un hyperboloïde le second à vingt mètres n'est pas un hyperboloïde de révolution, car il développe une surface à double courbure mais dissymétrique par rapport à l'axe vertical partant du centre du plan circulaire, c'est alors « un paraboloïde hyperbolique . La ligne directrice de la construction est une hyperbole contenue dans un plan vertical, qui est le plan de symétrie du volume ; celui-ci est généré par des cercles horizontaux de diamètres variables dont les centres sont situés dans l'hyperbole »²⁹, cette forme serait peut-être le souffle marin dans une voile.
- Le musée de Caracas (1954-1955), est une variante dans le processus esthétique-symbolique de Niemeyer, un projet sans suite qui défie non seulement les fonctionnalistes mais aussi la nature, ayant la volumétrie d'une pyramide sur plan carré renversé , ayant une intention aussi spectaculaire que dans le projet de la mosquée d'Alger 1968, « *La mosquée d'Alger, qui n'a pas été construite faute d'argent ou pour toute autre raison que j'ignore, je l'ai même imaginée dans mon sommeil, au milieu de la mer, étincelante de beauté. A mon réveil, j'ai commencé aussitôt à la dessiner* »³⁰.

²⁹ Construction moderne, n°36, dec. 1983, p.4

³⁰ Edouard Bailby, Oscar Niemeyer, « Niemeyer Par lui-même », Editions : Jacob Duvernet, 1993.

Un volume bicoque sur plan circulaire, sur la coque inférieure légèrement convexe est posée une coque concave effilée vers le sommet, ce bâtiment est maintenu par six supports découpés finement afin d'effleurer la surface marine, inspiré d'une métaphore spirituelle immatérielle, entre autres la relation spirituelle sous son dôme bulbeux.

- Toujours à la recherche du dynamisme au niveau du plan et de la forme, la structure utilisée dans l'auditorium de Brasilia (1968-1972) de plan trapézoïdale, mais avec une technique différente « la toiture est portée par un faisceau de poutres en béton armé de profil tour à tour saccadé et flexueux »³¹. Ce nervurage est issu du projet de l'auditorium pour le ministère de l'éducation à Rio 1948, il est aussi repris pour la structure de la société Duchen à Sao Paolo au niveau de la structure des ateliers, le bâtiment se distingue des autres bâtiments ayant la même structure et le même rythme, par le découpage en travées régulières soutenues par de poutres de profils arqués de différentes dimensions et de faible courbure avec une portée d'une vingtaine de mètres, retombant au sol sous forme de supports inclinés. La technique est alors sublimée par la modénature prise dans des rythmes de caractère organique.
- Dernière structure de cette typologie volumétrique, une coque en béton lenticulaire apparue dans un premier lieu dans le projet de la station de télévision de Rio 1954, puis en 1980 réinterprétée dans des dimensions plus petites, et de profil ramassé dans le mémorial Juscelino Kubitschek à Brasilia.
- Le centre administratif à Alger 1968, a un concept structurel à l'opposé de la structure de la coque homogène à surface continue, d'un seul volume, l'idée ici consiste en l'addition d'éléments identiques bénéficiant d'une portée importante, élaborant une écriture à trois dimensions.
- Le projet le plus récent de Niemeyer en Algérie est la bibliothèque Arabo-Sud-Américaine (figure 80), une infrastructure culturelle, favorisant l'échange culturel des pays arabes avec les pays latins. De ce fait le terrain a été choisi à Zeralda.

Ce projet contient une bibliothèque, un auditorium, un siège administratif, une résidence d'accueil et les annexes un théâtre un restaurant et un parking, étant surelevé à 1m10 de la hauteur de la voix principale, son accès se fait à travers une rampe, qui assure aussi la liaison entre la bibliothèque, le théâtre et le restaurant.

1- La Bibliothèque:

Se trouvant au centre de cet ensemble, c'est un édifice de neuf étages sur pilotis doubles et forme une courbe à plan arqué, d'une superficie de 28 000,00m², une forme pas étrangère, déjà réalisée dans la bibliothèque municipale de Belo Horizonte, la différence se trouve au niveau des gabarits uniquement, car cette dernière est de R+2.

2- Le Théâtre :

Situé du côté droit de la bibliothèque, il s'agit d'un volume en forme de cylindre, coupé par un plan oblique, ce théâtre à une superficie de 5000 m².

3- Résidence d'accueil

Situé à gauche de la bibliothèque de forme courbe aussi, avec ses 2900 m² de surface bâtie, un volume courbe à deux niveaux et un accès au sous-sol.

³¹ Gilbert Luigi, « Oscar Niemeyer, une esthétique de la fluidité », Editions Parenthèses, Marseille, 1987. P 36

4- Siège administratif (Bureaux)

Celui-là situé à l'extrême droite de la bibliothèque de forme cylindrique, avec ses 3000 m² de surface bâtie.

5- Le Restaurant

Faisant face au théâtre, ayant la même forme que celle de l'auditorium du siège communiste en France, un dôme posé à même le sol avec une hauteur de 18m et une largeur de 50m disposant d'une superficie de près de 3200m².

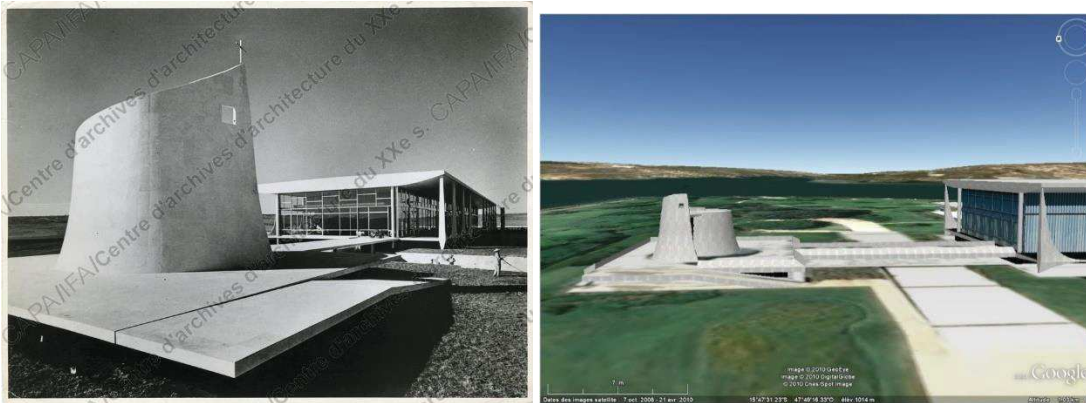


Figure 77 : Géométrie du Palais de l'Aurore

Source : archiwebture.citedelarchitecture.fr

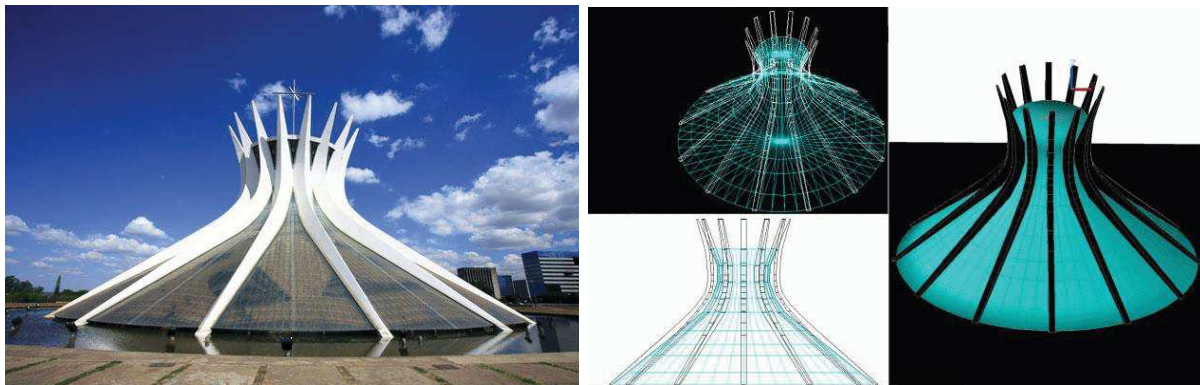


Figure 78 : Géométrie de la cathédrale Nossa-Senhora-Aparecida (1959-1970) à Brasilia

Source : www.futura-sciences.com

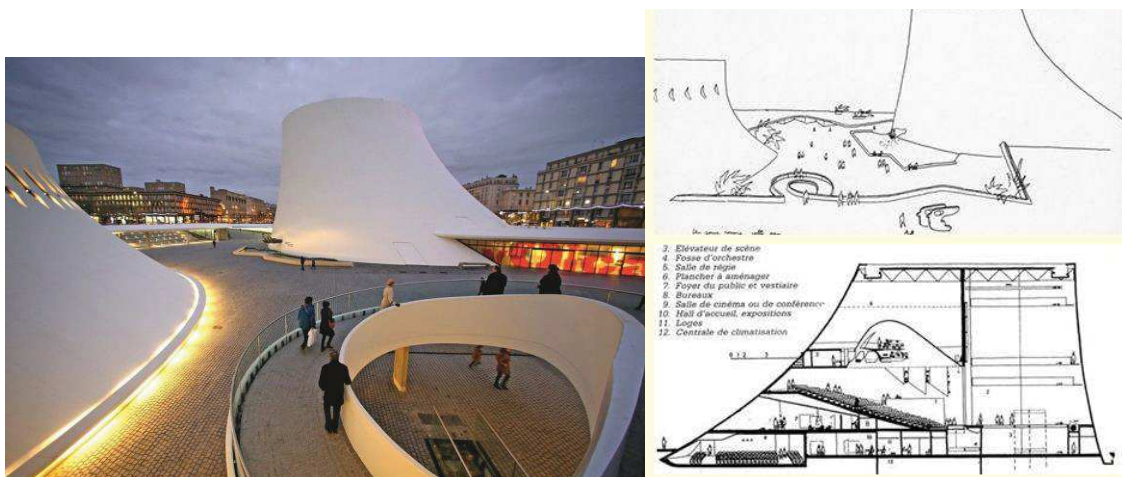


Figure 79 : La maison de la culture du Havre (1970-1982)

Source : culturebox.francetvinfo.fr

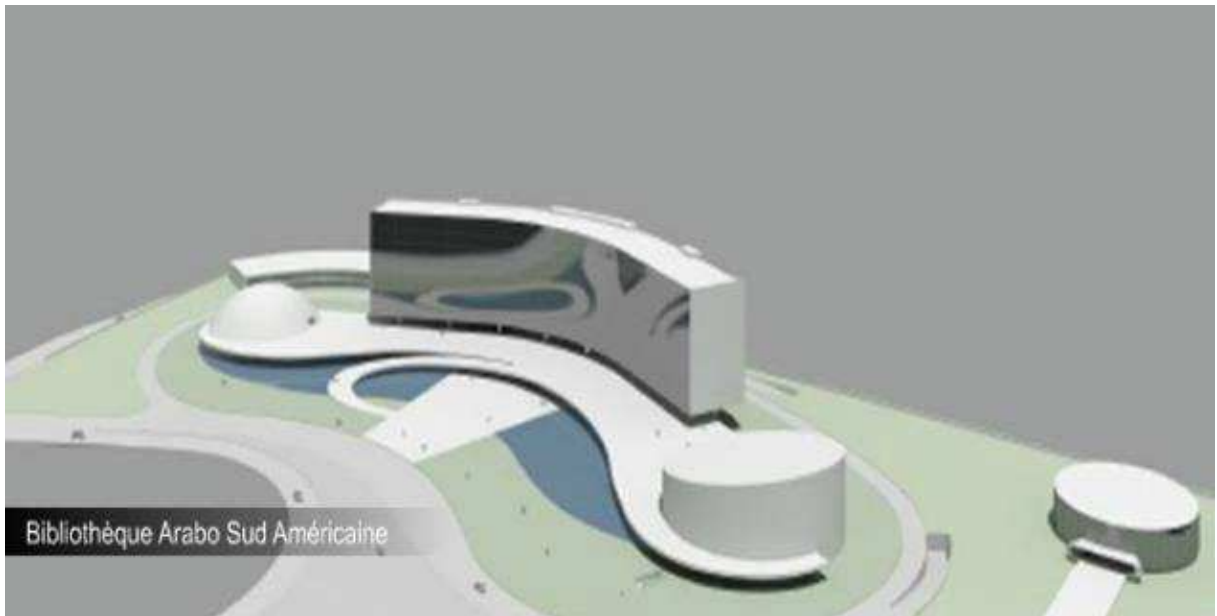


Figure 80 a et 80 b: Bibliothéque Arabo Sud-Américaine.

Source : <http://www.arpc.dz/?q=fr/biblioth%C3%A8que-arabo-sud-am>

Chapitre III :

Analyse géométrique du cas d'étude : L'auditorium de l'Université des frères Mentouri Constantine 1 :

I. Présentation du cas d'étude :

Niemeyer disait :

« Je voulais que le béton obéisse à mon esthétique dans le cadre du relief dramatique et accidenté de Constantine, une ville accrochée à un rocher, et comme suspendue dans le vide. (...)»³²

Implantée sur un promontoire d'un site historique de la ville, qui a été choisi par Oscar Niemeyer lui-même, le projet fut réalisé entre 1969-1972. L'université des frères Mentouri couvre une superficie de 45 ha. (Figure 81 a et figure 81 b)

Ce projet n'était pas une mince affaire, il ne voulait pas réaliser une université quelconque qui s'inspirait du vocabulaire local, ou encore moins du vocabulaire de l'architecture coloniale. Il voulait s'en démarquer, quitte à choquer ses interlocuteurs. Dans ce projet Niemeyer cherchait à exprimer la technique qui était d'actualité durant ces années, et surtout montrer les progrès considérables du génie civil au Brésil.

En faisant la conception de cette université Niemeyer avoue avoir été moins baroque, « un élément lui est apparu », lui qui avait la réputation de faire de l'architecture baroque³³ en utilisant le béton armé qui lui facilité la réalisation de n'importe quelle forme qui lui venait à l'esprit. Il va donc changer le programme qui lui a été donné pour l'université, en essayant de rassembler les différents étudiants des différentes spécialités, pour éviter l'hyper spécialisation, en s'appuyant sur l'idée de son ami éducateur Darcy Ribeiro, qui favorise le contact entre les différents étudiants des différentes spécialités. Tout ceci afin de permettre l'échange d'expériences et d'éviter par la même occasion l'hyperspécialisation limitatrice. Il avait l'ambition de réaliser l'université du futur. Il a dû donc trouver une solution propre à cette conception, en cherchant à exprimer de l'audace à travers la structure.

A la veille de la construction de ce projet, il a été convoqué, cette fois par les enseignants qui désiraient comprendre et savoir ce qu'il allait changer dans le programme, il a donc rédigé un texte pour essayer d'expliquer le projet. En voici un petit extrait :

« Mon idée de l'université est différente de ce qui a été réalisé jusqu'à ce jour et cela explique les doutes qu'il y eut au début. Mes arguments étant si clairs, honnêtes et irréfutables que tous l'acceptent sans discussion.

³² (Chitour, 2012).

³³ L'architecture baroque reprend le principe de la contraposition de la courbe et de la contre-courbe, du profil concave versus le profil convexe.

Mon projet est basé sur la centralisation et sur la flexibilité ; de ce fait je refuse l'université traditionnelle, avec des dizaines d'immeubles –un pour chaque faculté- occupant trop de terrain, le divisant en petit lots, créant des rues inutiles et, ce qui est plus grave, obligeant à des travaux coûteux comme : mouvements de terrains, fondations, installations de lumière, gaz, etc. ; sans parler de la multiplication des classes, des auditorios et laboratoires ; ces derniers disséminés à travers les facultés, brisant l'unité et le niveau scientifique lui-même. L'université que je propose est humaine, logique et compacte. Elle est apte aux modifications que le futur pourra exiger.

Mon projet ne prévoit que deux immeubles destinés à l'enseignement : le bloc des classes et celui des sciences. Dans le premier se trouvent toutes les classes et auditorios ; dans le second, les laboratoires et la recherche. L'ensemble est complété par le bloc de l'administration, l'auditorium, la bibliothèque, le restaurant, « le village » et l'ensemble sportif. Le schéma est si logique que, si demain l'université décide de créer une nouvelle faculté elle n'aura pas besoin de construire un autre immeuble ; elle n'aura qu'à établir les horaires et les programmes et le lendemain commencer les cours. Etant donné mon explication il est normal que l'on se pose la question suivante : quel est le programme adopté dans votre schéma ? Ma réponse est simple : n'importe quelle université –jusqu'à 10 000 élèves- pourra s'adapter à mon schéma, à condition d'adapter à mon schéma les principes que je propose. Je ne suis pas optimiste vis-à-vis des grandes universités vu leurs problèmes complexes dont ceux du corps enseignant (...))»³⁴.

Ainsi le terrain qui aurait pu être abimé par les vingt bâtiments, s'est transformé en un beau parc nécessaire à l'université. (Figure 82)

Niemeyer s'est alors engagé dans une architecture de grandes dimensions, sans être effrayé par la monumentalité tant combattue. De ce fait, il a changé le programme initial qui consistait en vingt bâtiments pour les différentes facultés, et les a réduits à six :

- Deux blocs ; un pour les classes avec 250m de long qui comprend les salles de cours ainsi que les amphithéâtres, et un autre de mêmes dimensions pour le domaine scientifique.
- Une tour administrative de 19 étages.
- Une bibliothèque.
- Un auditorium.
- Un Restaurant universitaire.

Niemeyer est parti d'un postulat combinant forme et structure, qu'il avait résumé ainsi :

« L'architecte peut chercher la liberté plastique, mais sans contrarier la logique de la technique de construction »

Une autre expression plastique est apparue dans ce projet, le bloc de cours est un parallélépipède qui fait 250m de long et 7m d'épaisseur, de façades quasiment aveugles, se reposant sur 12

³⁴ AA 184, «Les paradoxes d'Oscar Niemeyer, Nouveau siège de Mondadori, Milan par Oscar Niemeyer », p20-23, 1976.

pilotis répartis sur deux files de six pilotis. Ces derniers sont des troncs de pyramides qui font 3m50 de hauteur et 2m à la base, ils sont disposés chaque 50m. (Figure 83)

Dans ce bâtiment, Oscar privilégie l'étirement de la barre, mais surtout les grandes portées; le fait que le bâtiment repose sur ces pilotis donne l'impression que le bâtiment est soulevé du sol, porté par son ombre. La légèreté est alors exprimée ici d'une autre façon que celle des jeux linéaires propres aux structures externes des parois de Brasilia.

Le bureau technique d'Alger a examiné le projet et a déclaré que la poutre du bâtiment devait faire 1m d'épaisseur. Niemeyer a donc fait appel à l'ingénieur Bruno Catarina, afin de prouver l'exactitude des calculs. Ce dernier affirme que l'épaisseur nécessaire était de 0.3m seulement, ce principe de structure fut alors utilisé dans l'ensemble du projet y compris l'auditorium. Cependant lors de la réalisation, Oscar a rencontré des problèmes d'ordre pratique, en raison du manque de la main d'œuvre qualifiée, ceci dit il est arrivé à régler ce problème avec son équipe. (Figure 84)

Fidel Castro lui-même a visité l'Université de Constantine, et n'en revenait pas, il a frappé les colonnes qui soutenaient les bâtiments de cours pour voir si elles pouvaient tenir le coup.

L'auditorium, une coque autoportante exprimant la légèreté, qui a été l'aboutissement de voute antérieures, qu'utilisait Niemeyer dans ses projets, cette coque en forme d'aile d'oiseau est insérée dans un plan trapézoïdal. (Figure 85)

Cet édifice contient une poutre centrale apparente et deux points d'appuis qui lui donnent la forme des deux ailes descendants pour se poser au sol, à l'aide d'un arc d'une portée de 100m.



Figure 81 a : Les différents blocs de l'université.

Source : <http://www.umc.edu.dz/index.php/fr/2013-01-21-15-27-57/item/1152-ceremonie-de-la-rentree-universitaire-2016-2017>



Figure 81 b : Vue d'ensemble de l'université.

Source : www.huffpostmaghreb.com

II. Les étapes de la réalisation :

Nous les résumons ici à travers ces points :

- 1- Etudes de sol afin de pouvoir choisir le type de fondation.
- 2- Etude technique, qui consiste en la vérification du béton et le choix du béton à utiliser, (S'il s'agit d'un béton en fibre, vu que c'est un grand dallage), afin d'éviter les fissures, et aussi si c'est un béton manufacturé très contrôlé où ils ont eu recours à l'utilisation des accélérateurs de sèche s'il a été coulé sur place ou au contraire à des retardateurs ; afin de garder le béton frais jusqu'à son arrivée au chantier.

Ainsi que le type de nappe à utiliser, où la plus probable dans ce cas est la nappe simple, vu que c'est une forme incurvée.

- 3- Afin de pouvoir assurer la réalisation de la forme, il fallait utiliser un système de coffrage gonflable, pour pouvoir garder la même forme arquée pour les deux ailes de l'auditorium, ceci dit ; il est difficile de trouver ce type de coffrage, donc il est très peu probable qu'on ait eu recours à ce genre de coffrage, mais plutôt au coffrage traditionnel, tel perçu dans la (Figure 84).



Figure 82: Aménagement de l'espace en un parc.

Source : www.umc.edu.dz/index.php/fr/

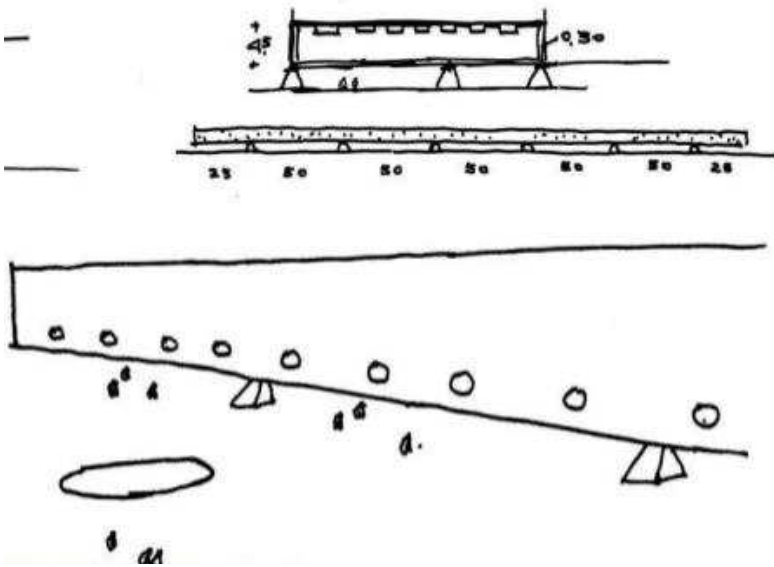
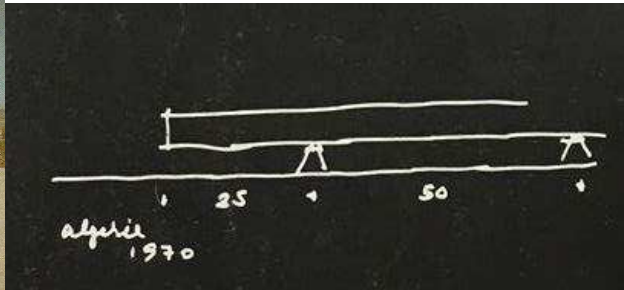


Figure 83 : Forme et structure du bloc des cours avec croquis de l'architecte.

Source : iljacobus.blogspot.com/2009/12/projeto-da-universidade-de-constantine.html



Vu du chantier de la coupole du complexe sportif du 5 juillet.

Source : Anonyme. Internet, libre de droit.



Vu sur la tour de l'université de Constantine.

Source : Anonyme. Internet, libre de droit.

Figure 84 : Chantiers de réalisation.

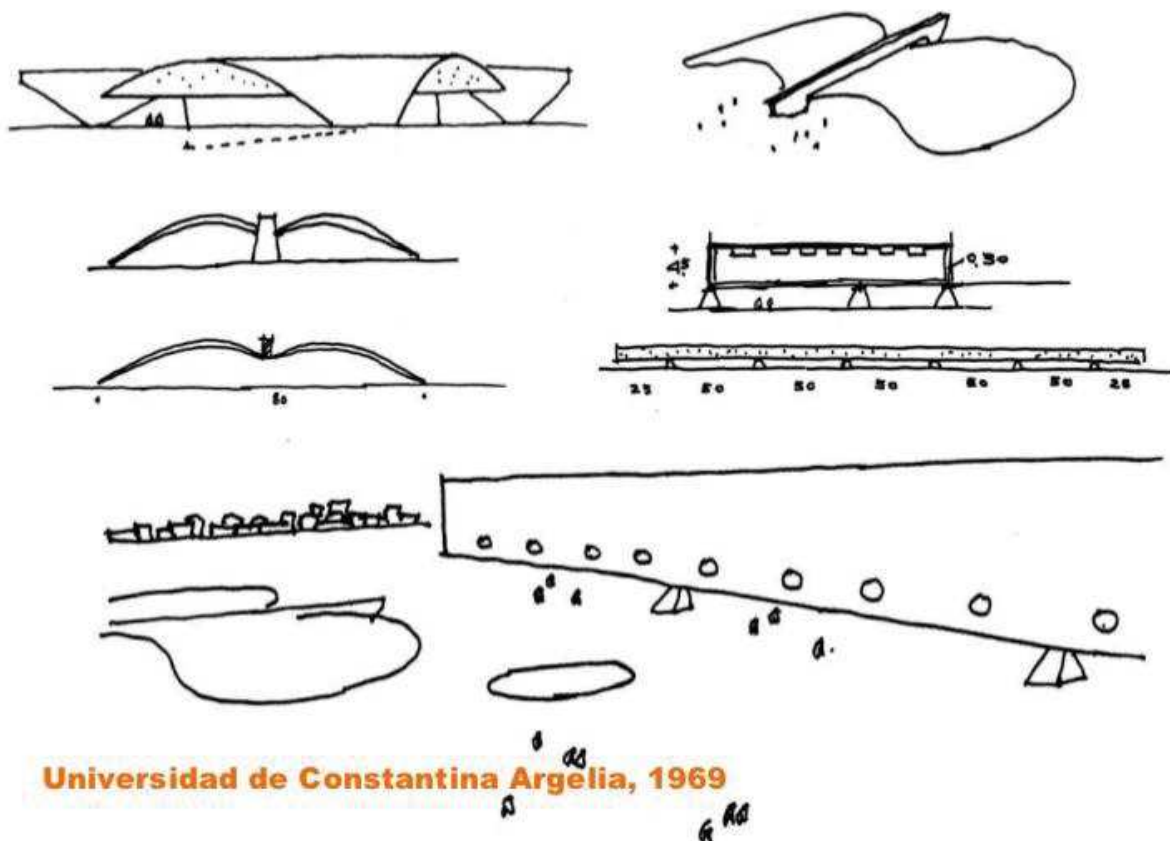


Figure 85 : Croquis de Niemeyer de l'auditorium et du bloc des cours.

Source : www.slidshare.net/eadpucv/niemeyer-103-la-potica-de-una-experimentacin-creadora

III. Description de la structure de l'auditorium :

a) La poutre :

Comme nous l'avons précédemment dit, l'auditorium est soutenu par une seule poutre qui se trouve au milieu des deux ailes.

Celle-ci a une épaisseur de 0,3m, soutenue de part et d'autre par un point d'appui. Ces derniers ont une forme triangulaire (en tête de bêche), et la même épaisseur que la dalle.

Cette poutre agit comme un mur porteur, non seulement en raison de son épaisseur, car elle se trouve être petite pour tout ce qu'elle supporte; mais aussi grâce à l'utilisation de la symétrie des deux dalles, qu'elle supporte, car la résultante (R_t) des deux vecteurs (R_1+R_2) sortant des deux arcs, fait que la ligne de force se trouve au centre de la poutre en question. La poutre est ainsi équilibrée, grâce à ce système structurel

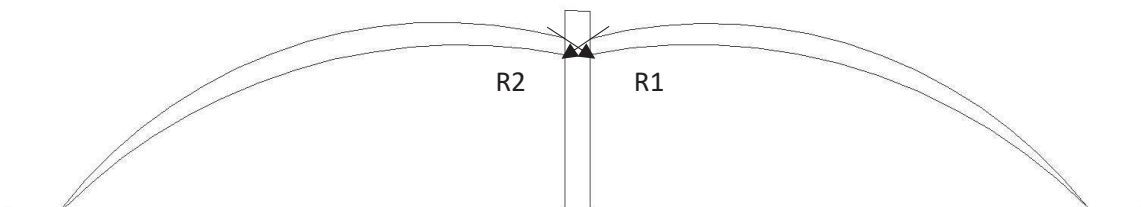


Figure 86 : Répartition des charges des deux coques sur la poutre centrale.

Source : Auteur

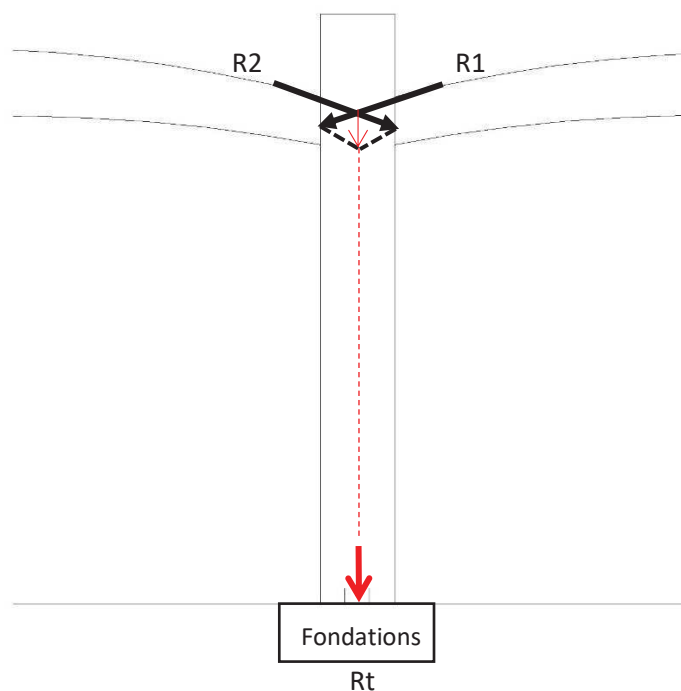


Figure 87 : Zoom sur la répartition des charges sur la poutre centrale.

Source : Auteur

b) Les coques (Dalles) :

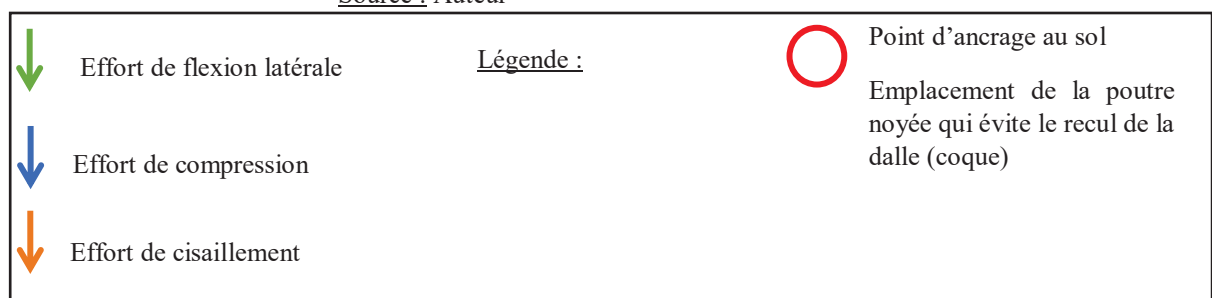
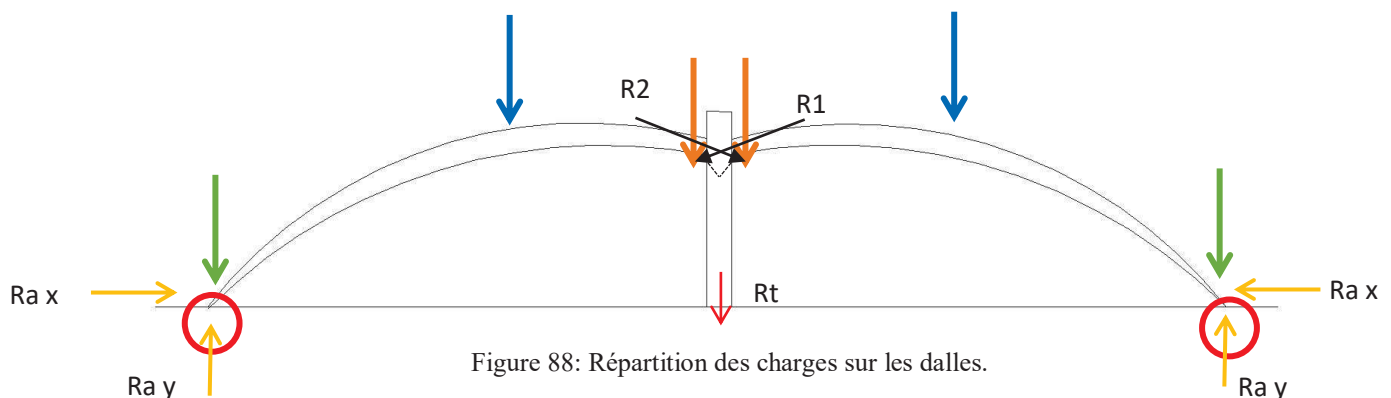
Le grand dallage cause de gros problème, car la répartition exacte des contraintes n'est pas certaine, et de ce fait génère des flexions dues à la traction dans tous les sens, nous retrouvons aussi le problème de coffrage.

Ce type de dallage est semblable au dallage d'un plancher sur une poutre, particulièrement par rapport à la répartition des charges. Il s'agit d'une dalle frettée, où il y'a beaucoup de ferrailage, afin d'éviter les efforts de traction.

Dans ce cas, nous retrouvons trois types de charge à savoir : la compression, la flexion ainsi que le cisaillement.

Les efforts de flexion sont contournés vers des efforts de compression grâce à la forme arquée. Et donc nous retrouvons principalement la flexion au niveau des parties latérales. Les efforts de compression se trouvent au milieu des arcs où le ferrailage travaille moins, tandis que les efforts de cisaillement se trouvent entre la poutre et les deux parties arquées.

Afin d'éviter le recul des arcs (coques), il y a eu recours à des poutres noyées au niveau des deux points de repos des arcs, ou entre le sol et la terminaison des arcs.



Comme il faut avoir la même forme pour les deux arcs de l'auditorium, et afin de pouvoir réaliser et de garder la géométrie qu'Oscar avait imaginée, les ingénieurs auraient pu utiliser un système de coffrage gonflable.³⁵

³⁵ Il existe plusieurs procédés de coques en voile de béton réalisées avec un moule gonflable. En général, un tissu enduit, découpé et assemblé en portion de sphère, est gonflé et maintenu sous pression. Le compresseur d'air est à double sécurité pour éviter les surpressions et compenser les pertes de pression. La coque doit rester sous

IV. Analyse géométrique de l'auditorium:

Comme nous l'avons cité dans les chapitres précédents, l'architecture d'Oscar s'inspire de la nature qui l'entoure et de ce fait, son architecture ne peut appartenir à un seul type de géométrie. Elle va au-delà, passant par la géométrie euclidienne à ses débuts et arrivant à la géométrie non euclidienne après Brasilia.

Nous remarquons en effet au niveau du plan masse de l'Université de Constantine (figure 89), l'utilisation des deux géométries, la première pour l'ensemble des bâtiments, qui sont parallélépipédiques ou encore cylindriques (figure 90) ; à part l'auditorium qui lui, est inspiré de la nature, représentant les ailes d'oiseau. Ce dernier s'inscrit dans le deuxième type de géométrie, à savoir la géométrie non euclidienne et plus précisément la géométrie hyperbolique. Cette géométrie où le nombre des parallèles d'une droite passant par le même point est infini, et la somme des angles d'un triangle est inférieure à π et donc à 180°

De ce fait l'analyse du cas d'étude se fera uniquement sur l'auditorium, afin de pouvoir démontrer l'utilisation de cette géométrie, et retrouver par ailleurs le profil et sa représentation dans ce type de géométrie. Pour ce faire, nous nous appuyerons sur le demi-plan de Poincaré précédemment expliqué.

L'auditorium est constitué d'une coque séparée en deux ; afin de donner l'impression des deux ailes, celles-ci se retrouvent symétriques par rapport à la poutre centrale (figure 91), qui est complètement apparente ayant une épaisseur de 0.3m ; chacune des ailes est formée par un arc d'une portée de 100m qui se pose ensuite sur le sol en un point unique, comme le dit si bien Niemeyer, ne se référant pas à la définition du point dans la géométrie, mais plutôt par rapport aux charges qui retombent en un point unique, car la terminaison de l'arc est une ligne, qui est le résultat de l'intersection des deux plans, celui de l'arc et celui du sol. (Figure 92)

Du point de vue géométrique, et comme nous le savons déjà, la coque s'inscrit dans un plan trapézoïdal, et en se référant au demi-plan de Poincaré nous trouvons que chaque aile est un quadrilatère non euclidien, qui est le résultat de l'intersection de deux demi-droite et de deux géodésiques (demi-cercle). (Figure 93)

pression pendant tout le chantier de ferrailage et jusqu'au séchage du béton. Il faut une membrane pour chaque coque, quand elle reste en place et sert d'étanchéité.

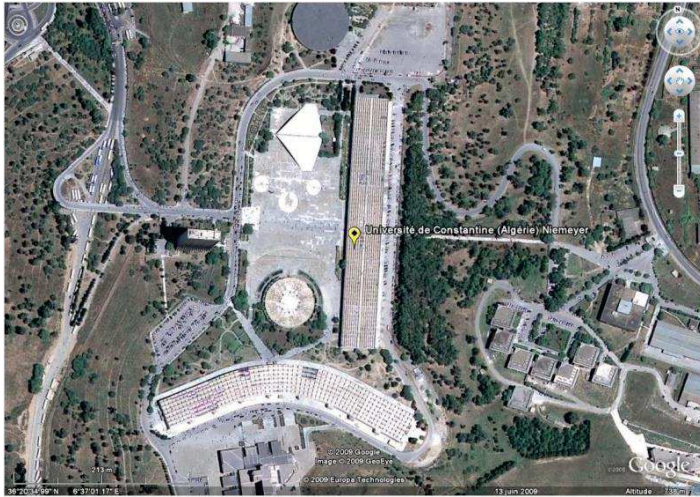


Figure 89 : Plan masse de l'université.

Source : Google Earth



Bâtiment de géométrie euclidienne

Bâtiment de géométrie non euclidienne

Figure 90 : Identification de la géométrie des bâtiments.

Source : Auteur

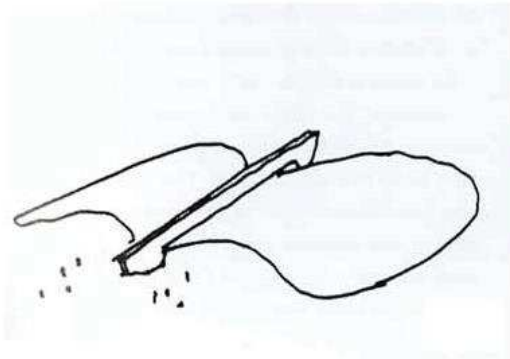


Figure 91 : Forme de l'auditorium et de la poutre centrale.

Source : iljacobus.blogspot.com/2009/12/projeto-da-universidade-de-constantine.html



Figure 92 : terminaison de l'arc et son intersection avec le sol

Source : iljacobus.blogspot.com/2009/12/projeto-da-universidade-de-constantine.html

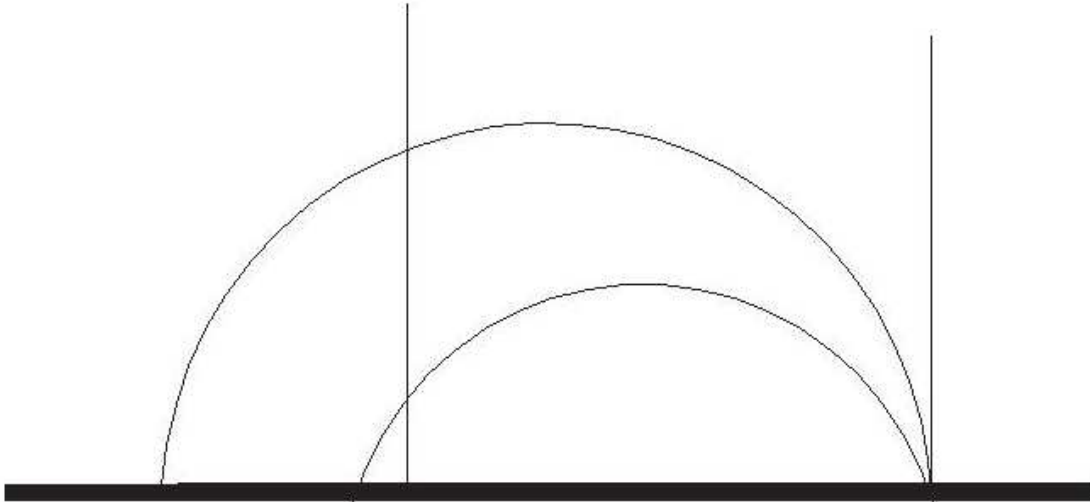


Figure 93 : représentation de la forme de l'aile de l'auditorium en se basant sur le demi-plan de Poincaré
Source : Auteur

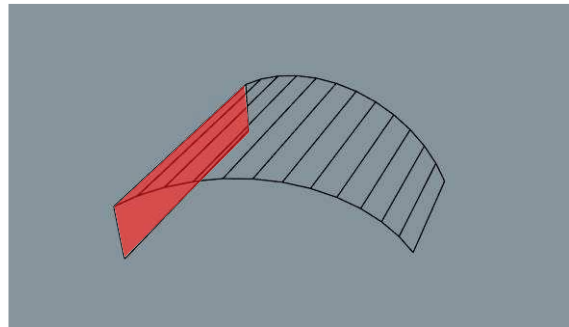
1. Démonstration géométrique :

La genèse géométrique et formelle s'articule ici à travers plusieurs manipulations géométriques. Il s'agit de :

- a) **1ere demi droite** : Représente l'intersection de la partie supérieure de l'arc (coque) et la poutre qui le supporte



Représentation de la 1ere demi-droite selon le demi-plan de Poincaré



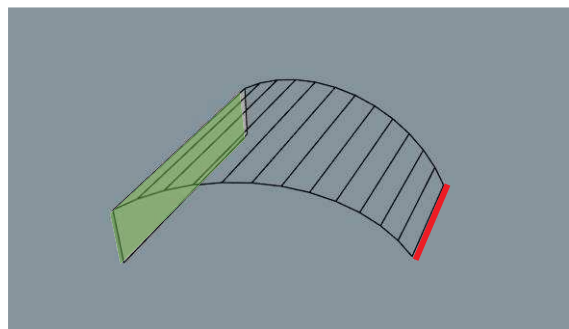
Représentation de la 1ere demi-droite en 3D

Source : Auteur

- b) **2eme demi-droite** : Représente l'intersection de la partie inférieure de l'arc (coque) avec le sol



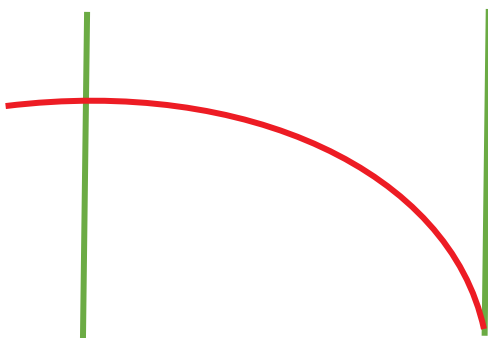
Représentation de la 2ème demi-droite selon le demi-plan de Poincaré



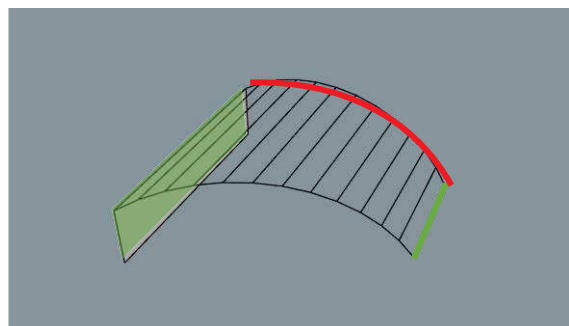
Représentation de la 2eme demi-droite en 3D

Source : Auteur

- c) **1ere géodésique (demi-cercle)** : représente le 1^{er} arc qui relie entre les deux demi-droites précédentes



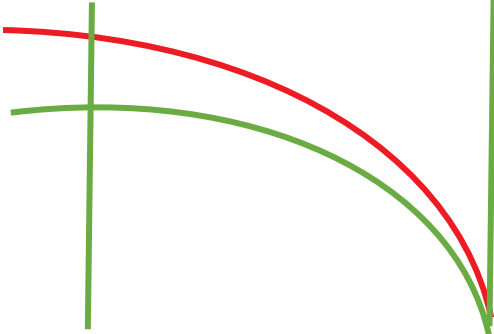
Représentation de la 1ere géodésique (demi-cercle) selon le demi-plan de Poincaré



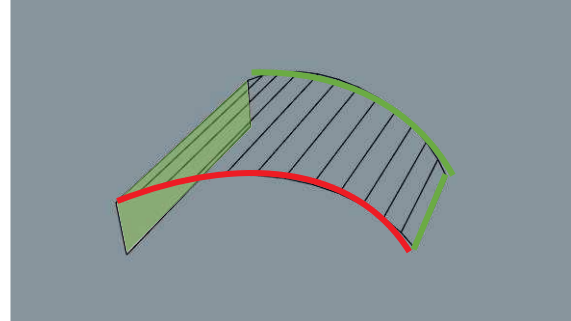
Représentation de la 1ere géodésique (demi-cercle) en 3D

Source : Auteur

d) **2eme géodésique (demi-cercle) de la même membrane:** qui représente le 2eme arc qui relie entre les deux demi-droites précédentes.



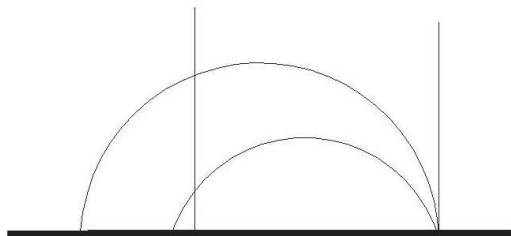
Représentation de la 2ème géodésique (demi-cercle) selon le demi-plan de Poincaré



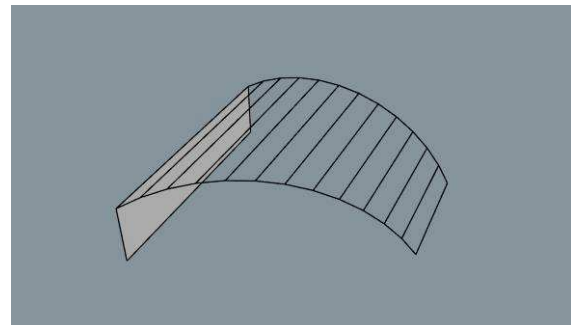
Représentation de la 2eme géodésique (demi-cercle) en 3D

Source : Auteur

Le résultat final :



Représentation de l'aile selon le demi-plan de Poincaré



Représentation de l'aile en 3D

Source : Auteur

De ce fait, l'auditorium est donc composé de deux ailes ayant une forme concave, ayant chacune la forme d'un quadrilatère qui s'inscrit dans un plan trapézoïdal, à travers l'union de deux demi-droites et de deux géodésiques. Les deux premières qui représentent dans ce cas la base de la poutre, ainsi que l'intersection du quadrilatère avec le sol. Or, les deux dernières quant à elles ne sont rien d'autre que les extrémités du quadrilatère, ou plus exactement les deux arcs de part et d'autre de la membrane de l'aile.

Afin de mieux percevoir le bâtiment dans sa logique formelle, nous avons eu recours à la restitution graphique de ce dernier, de façon à mieux appréhender sa forme finale et sa géométrie non euclidienne.

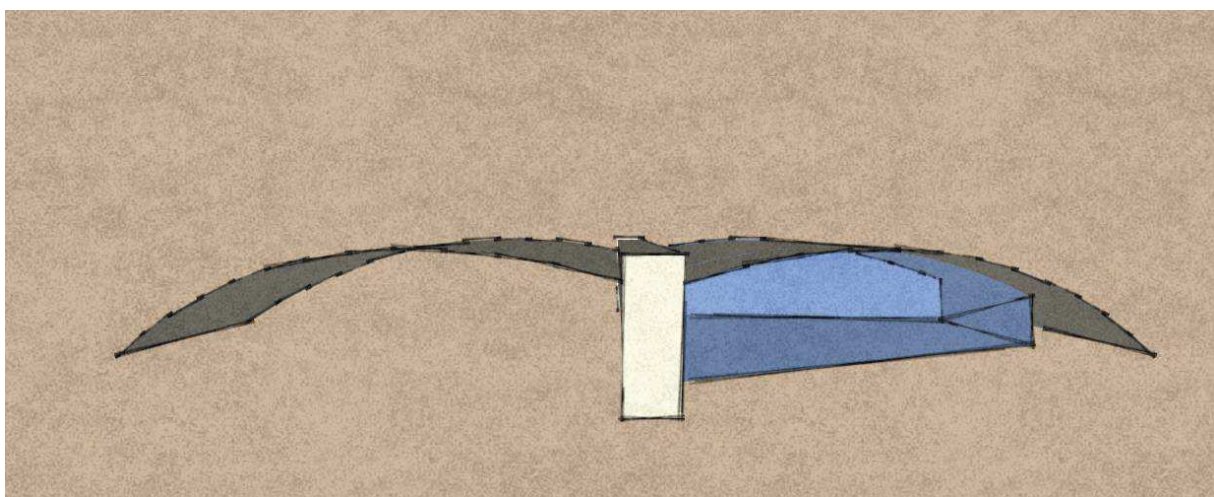
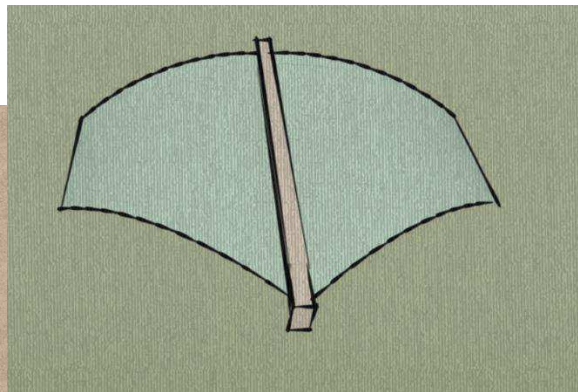
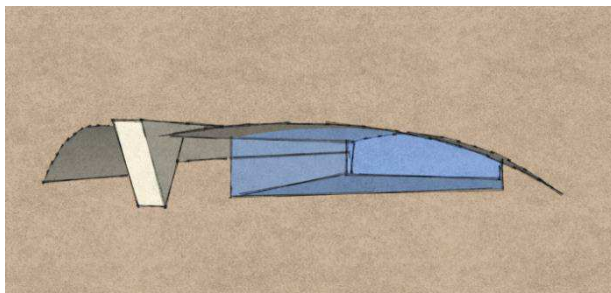
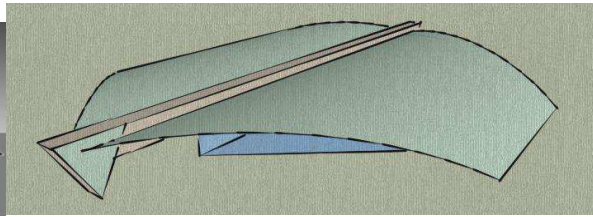
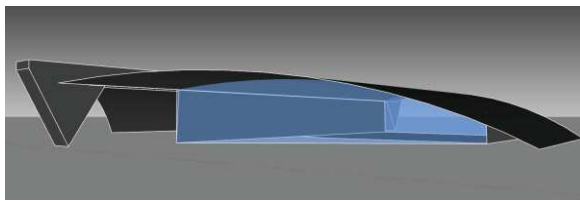
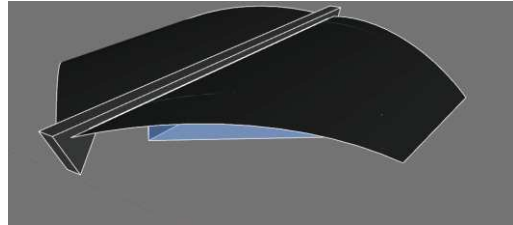
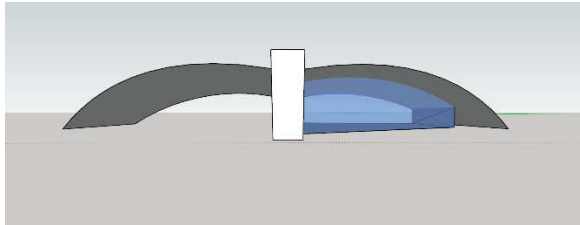


Planche : modélisation de l'auditorium, en évidant une des ailes, afin de mieux comprendre la forme géométrique de ce bâtiment.

Source : Auteur

Chapitre IV :

Identification des corrélations : Forme géométrique/ Structure.

I. Les objectifs recherchés :

Nous avons dans ce chapitre comme objectif principal celui de parvenir à identifier le rapport de corrélation architecturale : Forme/Structure ; et ceci en nous basant sur le rapport triadique de Vitruve : Firmitas- Utilitas, Venustas (Solidité- commodité d'usage/forme - beauté (esthétique)). Nous nous sommes intéressés de façon détaillée à consulter le rapport: forme/structure, en prenant en compte ces trois paramètres de l'équation de conception architecturale, telle énoncée par Vitruve. Cette dernière change d'une époque à une autre et d'un courant architectural à un autre, ce qui fait qu'il y a parfois une prévalence d'un paramètre au-dessus de l'autre. Ce qui pourrait caractériser surtout les courants d'architecture durant le 20e siècle.

« Dans tous ces différents travaux, on doit avoir égard à la solidité, à l'utilité, à l'agrément : à la solidité, en creusant les fondements jusqu'aux parties les plus fermes du terrain, et en choisissant avec soin et sans rien épargner, les meilleurs matériaux ; à l'utilité, en disposant les lieux de manière qu'on puisse s'en servir aisément, sans embarras, et en distribuant chaque chose d'une manière convenable et commode ; à l'agrément, en donnant à l'ouvrage une forme agréable et élégante qui flatte l'œil par la justesse et la beauté des proportions. »³⁶

Partant, du fait que Oscar Niemeyer insistait sur l'expression sculpturale de son œuvre, il ne perdait jamais de vue les deux autres paramètres de l'équation vitruvienne, à savoir : commodité d'usage (par la garantie de la fonctionnalité de ses espaces), et la structure (à travers la faisabilité technique).

Pour ce faire, nous avons eu recours à l'élaboration de deux tableaux synoptiques, à travers lesquels, nous résumons l'ensemble des données recueillies de notre analyse monographique, de restituin graphique et surtout de l'interprétation structurelle.

Dans le premier tableau nous identifierons les deux attributs, géométriques et structurels de la poutre, puis des coques, en tirant les avantages et les inconvénients de la forme et de la structure. Dans le second tableau nous identifierons les types de corrélation qui s'établissent deux à deux entre :

1. La poutre et la coque.
2. La coque et le sol.
3. La coque et la baie vitrée.

A travers ces corrélations nous essayerons d'identifier les solutions architecturales imposées par ces corrélations identifiées en amont.

³⁶ Vitruve, « De l'architecture », Livre I

Pour ce faire, partant d'un souci méthodologique, nous avons construit nos deux tableaux comme suite

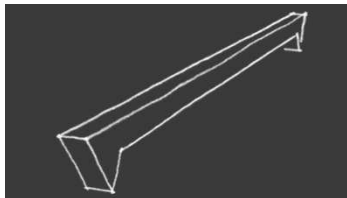
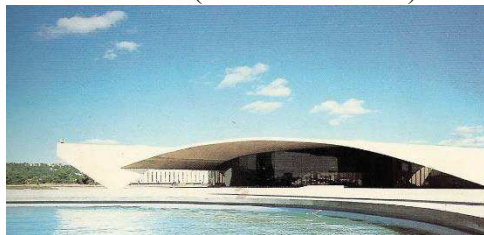
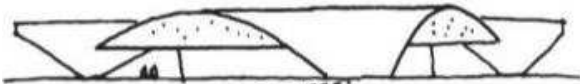
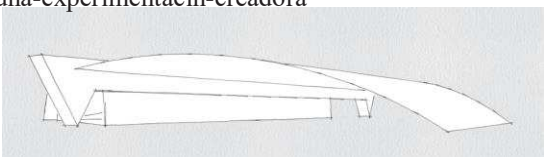


	Attributs géométriques	Attributs structurels
La poutre		
Avantages		
Inconvénients		
Les coques		
Avantages		
Inconvénients		

Tableau synoptique des attributs géométriques et structurel.

Type de corrélation	Traduction en solution architecturale
Poutre/coque	
Coque/sol	
Coque/baie vitrée	

Tableau synoptique des types de solutions architecturales imposées par les corrélations.

II. Interprétation des corrélations forme géométrique/ structure :

	Attributs géométriques	Attributs structurels
La poutre	Forme rectangulaire allongée linéaire, se terminant par deux extrémités en tête de bêche.  Source : Auteur	Le dimensionnement de la poutre a été fixé à une épaisseur de 0.3m, en la réduisant beaucoup de l'épaisseur initiale proposée par le bureau technique d'Alger qui était à 1m.
	02 appuis de forme triangulaire renversée (en tête de bêche).  Source : optimascript.com/fr/about-constantine/	La poutre repose sur 02 appuis uniquement.  Source : Croquis d'Oscar Niemeyer www.slideshare.net/eadpucv/niemeyer-103-la-potica-de-una-experimentacin-creadora  Source : Auteur
	Elle est apparente à l'extérieur, formant une arrête entre les deux coques.  Source : en.wikiarquitectura.com/building/university-of-constantine/#univ-constantine-18	Poutre structurelle portante unique dans l'édifice.  <small>Instituto Lina Bo e P. M. Bardi / Fundação Memorial da América Latina / Fundação Oscar Niemeyer / Edição</small> Source : Croquis d'Oscar Niemeyer http://arqpaulandrade.blogspot.com/2012/12/de-modo-que-croquis.html

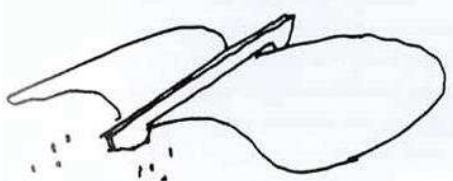


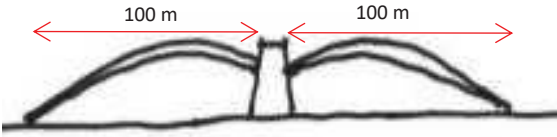
<p>Avantages</p>	<p>Cette solution structurelle garantit une grande portée, et libère ainsi l'espace de tout point porteur intermédiaire. (Notion nouvelle de plan libre par le couvrement unique)</p> <p><u>Source</u> : Croquis d'Oscar Niemeyer www.slideshare.net/eadpucv/niemeyer-103-la-potica-de-una-experimentacin-creadora</p> 	
<p>Inconvénients</p>	<p>Nous pouvons ainsi grâce à cet espace libre, aménager sans aucune contrainte l'espace de l'auditorium, sans soucis de poteaux ou de voile, comme écran visuel.</p>  <p><u>Source</u> : www.taschen.com/pages/es/catalogue/architecture/all/00414/facts_niemeyer.htm#images_gallery-10</p>	
<p>Les coques</p>	<p>Elles sont de forme concave.</p>  <p><u>Source</u> : en.wikiarquitectura.com/building/university-of-constantine/#univ-constanine-18</p>	<p>Elles ont une portée de 100m, symétriquement disposées de part et d'autre.</p>  <p>Croquis d'Oscar Niemeyer</p> <p><u>Source</u> : www.slideshare.net/eadpucv/niemeyer-103-la-</p>

Tableau synoptique des attributs géométriques et structurel




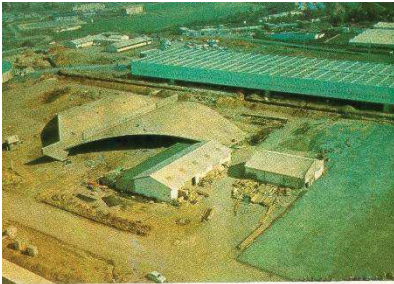
	<p>Leur forme est insérée dans un plan trapézoïdal.</p>  <p><u>Source</u> : Auteur</p>	<p>La structure est une nappe simple, au vu de la forme concave.</p>  <p><u>Source</u> : Anonyme</p>
	<p>Symétriques par rapport à la poutre centrale.</p>  <p><u>Source</u> : http://cdf.montevideo.gub.uy/foto/31-7</p>	<p>Béton manufacturé très contrôlé.</p>  <p><u>Source</u> : Anonyme, internet, libre de droit.</p>
<p>Avantages :</p>	<p>Cette solution technique avait permis un taux d'éclairage nécessaire pour le bon fonctionnement de l'auditorium (effet recherché).</p> <p>Le résultat esthétique fut garanti, grâce à un bel aspect de finition extérieure et ceci grâce à l'utilisation du béton manufacturé.</p>	
<p>Inconvénients</p>	<p>Nous déplorons le fait d'un ensoleillement très faible du bâtiment, car les deux coques avaient brisé les rayons de soleil.</p>	

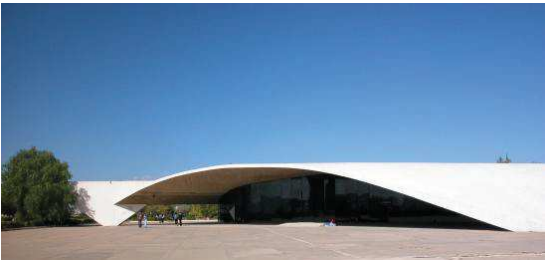
Tableau synoptique des attributs géométriques et structurel

III. Identification des types de solutions architecturale et/ou techniques imposées par la corrélation :

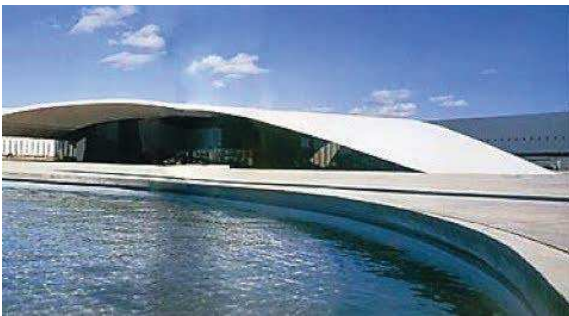
Type de corrélation	Traduction en solution architecturale et/ou technique.
<p style="text-align: center;">Poutre/coque</p>  <p><u>Source :</u> en.wikiarquitectura.com/building/university-of-constantine/#univ-constantine-18</p>	<p>L'évacuation des eaux pluviales, s'est faite grâce aux profils des deux coques vers la poutre droite qui avait proposé le fil d'eau. Les deux autres versants déversent les eaux pluviales directement au sol, au point d'ancrage au sol.</p> <p>L'esthétique réalisée par les profils des deux coques, concrétisaient avec la poutre, la métaphore formelle liée à « l'oiseau ».</p> <p>Le caractère brut du matériau béton, justifiait au regard la pureté et l'abstraction par la chromatique et la texture.</p>
<p style="text-align: center;">Coque/sol</p>  <p><u>Source :</u> http://giljacobus.blogspot.com/2009/12/projeto-da-universidade-de-constantine.html</p>  <p><u>Source :</u> en.wikiarquitectura.com/building/university-of-constantine/#univ-constantine-10</p>	 <p><u>Source :</u> http://giljacobus.blogspot.com/2009/12/projeto-da-universidade-de-constantine.html</p> <p>L'ancrage direct au sol a été fait pour éviter le recul, et augmenter l'illusion du contraste de la courbe/contre courbe ; concave/convexe.</p> <p>L'allure formelle des deux coques proposait par les profils géométriques, des auvents contre le soleil. C'est une solution qui garantit le passage graduel de l'extérieur vers l'intérieur.</p> <p>Un effet recherché pour l'éclaircissement mais pas pour l'ensoleillement.</p>  <p><u>Source :</u> www.lanacion.com.ar/1534017-oscar-niemeyer-el-legado-de-un-revolucionario</p>

Identification des types de solutions architecturales et/ou techniques imposées par les différentes corrélations

Coque/baie vitrée



Source : www.lanacion.com.ar/1534017-oscar-niemeyer-el-legado-de-un-revolucionario



Source : <http://giljacobus.blogspot.com/2009/12/projeto-da-universidade-de-constantine.html>

La nature du profil géométrique de la coque avait imposé une condition de réaliser les baies vitrées par parties et sur mesure afin d'éviter les interstices entre la coque et le châssis de vitrage.



Source : sinergiaymateriales.com/2012/12/11/oscar-niemeyer/universidad-de-constantina-1-oscar-niemeyer/

Un dialogue esthétique est né entre le caractère robuste/lourd du béton, et celui fin/transparent du vitrage, qui symbolise au mieux selon ce courant les signes de la modernité, mais surtout du rapport de transposition :

- Opaque/transparent.
- Lourd/ léger.
- Noble/ ordinaire.



Source : [/www.youtube.com/watch?v=LxGsgaB-JqI](http://www.youtube.com/watch?v=LxGsgaB-JqI)

Identification des types de solutions architecturales et/ou techniques imposées par les différentes corrélations

Conclusion générale :

En effet, malgré le recours de Niemeyer à la métaphore et à la symbolique, il s'assurait de la faisabilité technique, et proposait des solutions techniques qui sont également esthétiques en veillant sur l'image de la métaphore, à laquelle il se référait. En se souciant de la forme, il se souciait également des proportions, mais aussi et surtout de l'esthétique de l'édifice.

Conscient ou pas, Niemeyer avait eu recours à la géométrie non euclidienne dans la majorité des édifices de formes curvilignes, s'inspirant de la nature. Celle-ci était consolidée par la forte maîtrise de la structure. Comme c'est le cas pour l'auditorium de l'Université des frères Mentouri Constantine 1, où il a eu recours à la géométrie hyperbolique : deux quadrilatères chacun s'insérant dans un plan trapézoïdal, afin de concrétiser les deux ailes d'oiseau qu'il s'était imaginé. Même si les autres bâtiments de l'université ne s'inscrivaient pas dans la même géométrie, Oscar a gardé la même logique structurelle pour tous les bâtiments ; afin d'assurer une certaine harmonie dans l'ensemble universitaire.

« Je me rappelle qu'un jour, l'ingénieur Cardoso m'a téléphoné en disant : « Oscar, j'ai découvert la tangente qui va permettre que la coupole paraisse à peine toucher le sol »³⁷ ».

A travers ce passage et à travers nos recherches nous constatons que l'architecture d'Oscar Niemeyer découle principalement de la métaphore et de la recherche de la symbolique, en s'inspirant de la nature qui nous entoure, car il avait la certitude de la faisabilité des formes qu'il imaginait, et ceci grâce aux capacités de ses confrères ; les ingénieurs brésiliens qui étaient très avancés dans ce domaine, désirant faire connaître leur culture et affirmer leur identité brésilienne. Soucieux de la portée et des formes, il faisait appel à la courbe et au béton armé, ce qui lui facilitait les grands franchissements des portées, et garantissaient ainsi le plan libre.

A la lumière de nos recherches nous pouvons en fin de parcours, proposer nos hypothèses concernant la géométrie de l'architecture d'Oscar Niemeyer qui sont liées à notre problématique générale. Nous les avançons comme suit :

1. Niemeyer était certain de la faisabilité des métaphores et des formes qu'il esquissait au départ. Ce n'est en aucun cas un geste hasardeux. Il prenait du temps à imaginer les solutions et à ajouter des explications en guise de texte pour expliquer les idées de ses projets et comment il les imaginait.
2. Les corrélations entre la forme géométrique et la structure, renforcent la métaphore imaginée par Niemeyer, grâce au recours à la géométrie non-euclidienne d'une part et d'autre part grâce à la compétence de ses ingénieurs.

Par ailleurs, il est important de préciser ici les difficultés que nous avons pu rencontrer au cours de nos recherches, qui sont dues principalement à la non-disponibilité du dossier d'exécution de l'Université des frères Mentouri. Ceci explique les différentes hypothèses auxquelles nous avons eu recours dans le chapitre antérieur concernant la structure ; nous nous sommes donc basés sur les croquis de Niemeyer ainsi que les images de l'université que nous avons eu par certains enseignants de l'Ecole Polytechnique d'Architecture et d'Urbanisme, mais aussi

³⁷ « Un architecte engagé dans le siècle », <http://lepcf.fr/Niemeyer>

certaines enseignants et étudiants de l'Université de Constantine 1, et de ce fait nous avons tirés nos hypothèses et nos interprétations personnelles.

En ce sens, il serait fort intéressant de pouvoir par la suite, dans des travaux futurs essayer d'évaluer l'approche d'Oscar Niemeyer, à travers l'analyse de plusieurs projets, que nous pouvons mener au travers d'une confrontation analytique détaillée. Nous sommes convaincus aujourd'hui, que l'architecture de Niemeyer alliait forme géométrique et prouesses structurelles et techniques afin de parvenir à réaliser ses œuvres architecturales.

Bibliographie :

Ouvrages généraux :

- BAILBY Edouard, « *Niemeyer Par lui-même* », Editions : Jacob Duvernet, 1993.
- BARBARIN Paul, « *La géométrie non euclidienne* », Edition Scientia, Juin 1907
- CHERRAD Salah-Eddine, « *Aspects et réalités de Constantine, une métropole régionale en devenir* », Achevé d'imprimer sur les presses de l'Université Paul-Valéry, Montpellier, 2013.
- FRIEDELMEYER Jean-Pierre, « *La géométrie : histoire et épistémologie* », Irem de Strasbourg 2007
- GHIRARDO Diane, « *Les architectures postmodernes* », Editions : THAME & HOUDSON SARI, Paris 1997
- HITCHCOCK. Henry-Russel et JOHNSON. Philip, « *Le style international* », Editions : Parenthèses, Marseille, 2001.
- JENCKS Charles, « *L'architecture post-moderne* », Editions : Academy, 1979.
- JODIDO Philip, « *Niemeyer* », Editions : TASCHEN France, 2012.
- KHAN Hasan-Uddin, « *Le style international* », Editions : TASCHEN GmbH, Chine 2009
- LUIGI Guilber, « *Oscar Niemeyer, une esthétique de la fluidité* », Editions : Parenthèses, 1987.
- MASSU Claude, « *Le style international : préface (traduction français)* », Editions : Parenthèses, Marseille, 1997.
- Oscar Niemeyer, Nicoletta TRASI, « *permanence et invention* » 2007.
- NIEMEYER Oscar, « *Les courbes du temps* », Editions : Gallimard, 1999.
- NUTTGENS Patrick, « *Histoire de l'architecture* », Editions : PHAIDON, Paris 2002
- PETIT Jean, « *Niemeyer poète d'architecture* », Editions Arte Lugano, 1995
- PORTOGHESI Paolo, « *Le Post-moderne* », Editions : Electa Moniteur, Milan-Paris 1983.

Revue et articles :

- BKOUCHE Rudolph, « *La naissance de la géométrie non euclidienne* », Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1982, fascicule 7, p1-8.
- *Construction moderne*, n°36, dec. 1983.
- DURAND.S, « *De Janos Bolyai au GPS -Le fameux 5e postulat d'Euclide –* »
- *L'Architecture d'Aujourd'hui* 171, « *Oscar Niemeyer* », 1973.
- *L'Architecture d'Aujourd'hui* 184, « *Les paradoxes d'Oscar Niemeyer, Nouveau siège de Mondadori, Milan par Oscar Niemeyer* », 1976.

- L'Architecture d'aujourd'hui 319, « Musée de Niteroi : Oscar Niemeyer », en 1998.
- L'Architecture d'aujourd'hui 359, « Brésil », 2005.
- L'Architecture d'aujourd'hui 373, « Oscar Niemeyer », 2007.

Mémoires et thèses :

- GUIN Daniel, « Géométries non euclidiennes : petite introduction mathématique à l'usage des non-mathématiciens » Publication de l'IREM de Montpellier - production du groupe Mathématiques et Philosophie. 2015.
- HAUSBERGER Thomas, « Repères historiques et épistémologiques sur les Géométries non euclidiennes », Publication de l'IREM de Montpellier - production du groupe Mathématiques et Philosophie. 2015.
- SAIDANE Feriel « Essai d'identification du courant d'affiliation architecturale des œuvres d'Oscar Niemeyer » Soutenu en 2013.

Guides et supports didactiques :

- CHENNAOUI YUCEF, « Histoire de l'architecture contemporaine », polycopie d'HA6, EPAU, Alger, 2017 (document interne non-publié)
- FILLASTRE François « Les trois géométries » Université de Cergy-Pontoise.
- HECQUET Damien et PELLETIER David, « La géométrie non euclidienne (géométrie hyperbolique plane) », 2000.
- LEVY-LEBLOND Jean Marc, « La conquête de l'espace courbe », 2013.
- VINATIER Stéphane, « La géométrie : d'Euclide au GPS », Université de Limoges - Faculté des Sciences et Techniques – IREM.

Webographie :

- Architecture 3D : <http://architecture3d.org/technique/procedes-de-construction-maisons-bulles/> (consulté le 18/02/2019.)
- ChronoMath, notion de la géométrie non euclidienne dans le monde http://serge.mehl.free.fr/anx/geo_non_eucl.html, (consulté le 27/06/2018).
- Dans les pas de l'architecte Oscar Niemeyer https://www.comptoir.fr/blog-voyage/bresil/dans-les-pas-de-l-architecte-oscar-niemeyer-BRA_52_r.aspx (consulté le 18/06/2018)
- Futura Science : [/www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/mathematiques-initiation-geometrie-1443/page/5/](http://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/mathematiques-initiation-geometrie-1443/page/5/) (consulté le : 15/06/2018).

- Guide des œuvres d'Oscar Niemeyer au Brésil : <https://www.monnuage.fr/mes-voyages/guide-des-uvres-doscar-niemeyer-au-bresil-g1473526> (consulté le 20/06/2018).
- Journal des anthropologues : <https://journals.openedition.org/jda/4790> (consulté le : 10/06/2018).
- LUXORION : <http://www.astrosurf.com/luxorion/relativite-geometrie-noneuclidienne.htm> (consulté le 13/06/2018).
- Mondialisation.ca L'aventure algérienne d'Oscar Niemeyer, Chitour Chems Eddine <https://www.mondialisation.ca/laventure-algerienne-doscar-niemeyer/5315636> (consulté le 15/06/2018).
- Nombre, curiosité, théorie et usages <http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvm/Geometri/Geotrois.htm> (consulté le 15/06/2018).
- Oscar Niemeyer Fondation <http://www.niemeyer.org.br/biografia/2005-2012> (consulté le 15/06/2018).
- Oscar Niemeyer, un architecte engagé dans le siècle : <http://lepcf.fr/Niemeyer> (consulté le 10/09/2018).
- Site officiel d'Oscar Niemeyer : <http://www.niemeyer.org.br/> (consulté le 21/06/2018).

Annexes :

1. Article : Poincaré et son disque. Source : <http://perso.ens-lyon.fr/ghys/articles/disque-poincare.pdf> (consulté le 29/06/2018).
2. Extraits de planches de l'exposition présentée par la Fondation Oscar Niemeyer pour les Universités et Ecoles d'architecture. Mai 2013, EPAU, Alger.

Poincaré et son disque

par

Étienne GHYS



1 Un monde imaginaire

HENRI POINCARÉ n'a pas inventé la géométrie non euclidienne. Même le fameux *disque de Poincaré* existait avant lui. Pourtant, il a fait un usage si époustouffant de cette géométrie et de son groupe d'isométries que le nom *disque de Poincaré* n'est certainement pas usurpé. Le but de ce chapitre n'est pas de décrire l'histoire de la géométrie non euclidienne, car de nombreux ouvrages excellents y sont déjà consacrés (voir [16, 23, 28, 46, 47, 50], parmi mes préférés). J'aurais aimé proposer une visite guidée du disque, mais il est beaucoup trop vaste et je n'en ai moi-même exploré qu'une petite partie. Je voudrais plutôt convier le lecteur à une promenade. Le risque d'une marche aléatoire dans le plan euclidien est de revenir sans cesse au point de départ de manière récurrente, mais ce risque n'existe pas en géométrie non euclidienne ! Nous verrons qu'un chemin aléatoire dans le disque ne fait pas beaucoup de détours et mène presque sûrement quelque part. Mon but principal est d'essayer de transmettre une intuition géométrique de cet objet qui est passé progressivement, en moins de deux siècles, du statut de contre-exemple dont l'existence même était douteuse à celui d'un concept central qui a envahi presque toutes les mathématiques.

Ce texte n'est bien sûr pas destiné aux experts. J'ai par contre essayé de le rendre accessible à un étudiant de licence (motivé). Pour ceux qui voudraient en savoir plus, je propose une copieuse bibliographie – prétexte pour présenter quelques-uns de mes livres favoris.

Faisons d'abord connaissance avec une géométrie non euclidienne en utilisant la description imagée qu'en fait Poincaré dans la *Science et l'hypothèse* [60, chap. 3] :

« *LE MONDE NON EUCLIDIEN.*

Supposons [...] un monde renfermé dans [un grand cercle] et soumis aux lois suivantes :

La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint [le cercle] où ce monde est renfermé.

Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon [du cercle] limite ; soit r la distance du point considéré au centre de [ce cercle]. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.

Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.

Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.

Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable.

Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera [du cercle] limite.

Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.

Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher [du cercle] limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre [le cercle] limite.

Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables ; pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de température dont je viens de parler. [...] Qu'on me permette pour abrégé le langage, d'appeler un pareil mouvement déplacement non euclidien.

Ainsi des êtres comme nous, dont l'éducation se ferait dans un pareil monde, n'auraient pas la même géométrie que nous. [Si ces êtres imaginaires] fondent une géométrie, [...] ce sera la géométrie non euclidienne. »

C'est dans ce monde « ni contradictoire ni inimaginable » que nous allons nous promener.

Voici une citation de Coxeter montrant combien cette géométrie est bien « réelle » pour les mathématiciens [23] :

« When Hamlet exclaims (in Act II, Scene II) “I could be bounded in a nutshell and count myself a king of infinite space” he is providing a poetic anticipation of Poincaré's inversive model of the infinite hyperbolic plane, using a circular “nutshell” for the Absolute. »¹

Le lecteur est donc prévenu que ce monde est vaste. . .



¹Quand Hamlet s'exclame (Acte II, scène II) « Je pourrais être enfermé dans une coquille de noix et me considérer comme le roi d'un espace infini », il donne une anticipation poétique du modèle inversif de Poincaré du plan hyperbolique infini, en utilisant une « coquille » circulaire comme absolu.

2 Quelques formules

Avant de commencer notre promenade, il faut mettre en place quelques définitions, notations et formules qui ne feront que paraphraser la description imagée de Poincaré.

On note $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert dans le plan complexe. Si v est un vecteur tangent à \mathbf{D} en un point z , de norme euclidienne $\|v\|_{\text{eucl}}$, sa *norme hyperbolique*² $\|v\|_{\text{hyp}}$ est définie par

$$\|v\|_{\text{hyp}} = \frac{1}{1 - |z|^2} \|v\|_{\text{eucl}}.$$

Ceci permet de définir la *longueur hyperbolique* d'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{D}$ par

$$\text{long}_{\text{hyp}}(\gamma) = \int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|_{\text{hyp}} dt,$$

et la *distance hyperbolique* (ou distance de Poincaré) $\text{dist}_{\text{hyp}}(z_0, z_1)$ entre deux points z_0 et z_1 du disque comme le minimum des longueurs hyperboliques des courbes joignant z_0 et z_1 . Le *disque de Poincaré* est l'espace métrique ainsi obtenu.

Pourquoi choisir ce facteur $1/(1 - |z|^2)$ plutôt qu'un autre ? Tout simplement car c'est le facteur « évident » qui garantit que l'objet que nous venons de définir est *homogène*. Si α est un réel et a un élément de \mathbf{D} , la transformation de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ définie par

$$f_{\alpha,a}(z) = \exp(i\alpha) \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

préserve le disque unité (vérifiez!). L'ensemble de ces transformations forme un groupe que nous rencontrerons souvent dans ce chapitre. Notons pour l'instant que ce groupe opère *transitivement* sur le disque : étant donné deux points quelconques de \mathbf{D} , l'un des éléments du groupe envoie le premier point sur le second (vérifiez!). La dérivée de $f_{\alpha,a}$ est

$$f'_{\alpha,a}(z) = \exp(i\alpha) \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2},$$

d'où il résulte que

$$\frac{|df_{\alpha,a}(z)|}{1 - |f_{\alpha,a}(z)|^2} = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

(vérifiez encore...). En d'autres termes, la *métrique de Poincaré* est invariante par le groupe des $f_{\alpha,a}$ et le disque est bien homogène : *son groupe d'isométries opère transitivement* et tous ses points sont équivalents.

Nous verrons plus loin que cette homogénéité est une propriété cruciale qui caractérise « presque » le disque de Poincaré. Pour l'instant, nous allons utiliser l'homogénéité pour obtenir sans effort certaines formules dont nous aurons besoin.

²C'est, semble-t-il, Klein qui est responsable de la terminologie *géométrie hyperbolique*. Il y a bien sûr de bonnes raisons pour ce choix mais on ne peut que regretter l'usage trop fréquent du mot « hyperbolique » en mathématiques, avec des sens bien différents.

Il est facile de trouver la courbe la plus courte (au sens hyperbolique) joignant le point 0 de \mathbf{D} au point r situé sur l'axe $[0, 1[\subset \mathbf{D}$. Il suffit en effet d'observer que si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{D}$ joint 0 à r , la projection radiale $|\gamma| : [0, 1] \rightarrow [0, 1[\subset \mathbf{D}$ joint également 0 à r , et que sa longueur hyperbolique est plus petite que celle de γ (car la composante radiale d'un vecteur est plus courte que ce vecteur). Ainsi, l'unique courbe minimisant la longueur hyperbolique entre 0 et r est le rayon $[0, r]$ de longueur hyperbolique

$$\int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = \text{Argth}(r).$$

Cette longueur tend bien vers l'infini lorsque r tend vers 1, comme Poincaré nous l'explique dans sa présentation imagée.

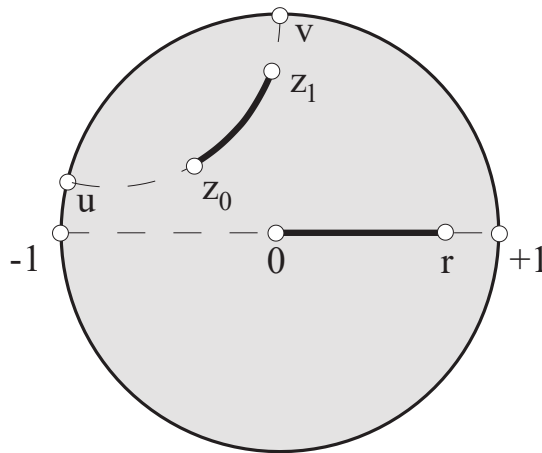


FIG. 1 – Géodésiques du disque

Pour trouver les *géodésiques* de \mathbf{D} , c'est-à-dire les courbes qui minimisent les longueurs hyperboliques à extrémités fixes, il suffit de faire agir le groupe d'isométries. Deux points z_0 et z_1 étant donnés, on peut trouver une isométrie qui envoie le premier sur 0 et le second sur un point de l'axe réel positif, comme précédemment. La géodésique cherchée est donc l'image d'un segment radial par une isométrie ; c'est un arc de cercle orthogonal au cercle unité (ou un segment radial). Pour s'en convaincre, le lecteur devra se souvenir (ou vérifier lui-même, ou encore, consulter [4, 23]) qu'une homographie

$$z \in \mathbf{C} \cup \{\infty\} \mapsto \frac{Az + B}{Cz + D} \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

(avec A, B, C, D nombres complexes tels que $AD - BC \neq 0$) envoie un cercle sur un cercle (de la sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$) et préserve l'angle d'intersection entre deux cercles. Ainsi, un diamètre du disque unité est envoyé par une isométrie $f_{\alpha, a}$ sur un arc de cercle orthogonal au cercle unité (ou sur un autre diamètre).

De même, il est facile d'utiliser l'homogénéité pour établir la formule donnant la distance entre deux points z_0 et z_1 . Nous savons déjà que

$$\text{dist}_{\text{hyp}}(0, r) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = \text{Argth}(r)$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{0 - (-1)}{0 - (1)} \cdot \frac{r - 1}{r - (-1)} \right) \right|$$

où l'on reconnaît $[-1 : 1 : 0 : r]$, *birapport* de quatre points de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Je rappelle que le birapport de quatre points distincts x, y, z, t est défini comme

$$[x : y : z : t] = \frac{z - x}{z - y} \cdot \frac{t - y}{t - x}$$

et que pour toute homographie f , on a

$$[f(x) : f(y) : f(z) : f(t)] = [x : y : z : t].$$

Puisque les homographies $f_{\alpha, a}$ préservent le birapport, les distances hyperboliques et les cercles orthogonaux au cercle unité, on obtient sans peine la distance hyperbolique entre deux points quelconques z_0 et z_1 de \mathbf{D} . Il suffit de considérer l'unique cercle (ou diamètre) orthogonal au cercle unité qui contient z_0 et z_1 . Ce cercle rencontre le cercle unité en deux points u, v (voir figure 1) et on a

$$\text{dist}_{\text{hyp}}(z_0, z_1) = \frac{1}{2} |\log[u : v : z_0 : z_1]|.$$

Le lecteur qui préfère une formule ne mettant en jeu que z_0 et z_1 pourra exprimer (comme Poincaré le fait dans son premier article sur le sujet [59]) la distance en fonction du birapport des points (cocycliques) $z_0, 1/\bar{z}_0, z_1$ et $1/\bar{z}_1$.

Remarquons que le disque est *2-homogène* : si $\text{dist}_{\text{hyp}}(z_0, z_1) = \text{dist}_{\text{hyp}}(z'_0, z'_1)$, il existe une isométrie qui envoie z_0 sur z'_0 et z_1 sur z'_1 .

3 Le disque de Poincaré est omniprésent

On connaît (au moins depuis Euclide !) la géométrie du plan euclidien. La géométrie de la sphère est également familière car, après tout, la *géo-métrie* est la science qui *mesure* la *terre*. Il a fallu deux millénaires pour que la géométrie hyperbolique s'impose parmi les mathématiciens (et un peu parmi les physiciens). Pourtant, elle mérite le même respect que ses deux sœurs plus âgées.

Il me semble que le « théorème de caractérisation » suivant justifie pleinement ce respect. Son énoncé est simple, mais sa preuve ne l'est pas. Elle utilise quelques-uns des théorèmes les plus difficiles du vingtième siècle et dépasse largement le niveau de ce chapitre élémentaire. Dans l'appendice, j'essaierai néanmoins de donner quelques indications sur cette preuve.

Théorème. Soit (X, d) un espace métrique ayant les propriétés suivantes :

— (X, d) est une **surface** : tout point de X possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^2 ;

— (X, d) est **2-homogène** : si $d(x, y) = d(x', y')$, il existe une isométrie qui envoie x sur x' et y sur y' ;

— (X, d) est un **espace géodésique** : pour tout couple de points (x, y) il existe une courbe $\gamma : [0, \ell] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x, \gamma(\ell) = y$ et qui est une isométrie sur son image (de sorte que $d(x, y) = \ell$).

Alors (X, d) est isométrique à l'un des trois exemples suivants :

— le **plan euclidien** ;

— la **sphère** de rayon R dans l'espace euclidien, ou le quotient de cette sphère dans lequel on identifie les paires de points diamétralement opposés (espace elliptique de Klein) ;

— le **disque de Poincaré** muni d'un multiple constant de la distance hyperbolique.

Quelques commentaires sur les hypothèses de ce théorème.

La propriété d'être de dimension 2 est fondamentale. Nous évoquerons plus loin d'autres espaces métriques géodésiques 2-homogènes de dimension supérieure. Le fait d'être une surface n'est par contre pas très important : on pourrait par exemple supposer que X est localement compact et de dimension³ topologique 2.

L'homogénéité est bien sûr essentielle, mais la 2-homogénéité l'est beaucoup moins. Nous verrons que si l'on remplace la seconde hypothèse par la simple homogénéité, le théorème reste vrai à condition d'ajouter quelques exemples supplémentaires moins importants (le lecteur peut-il déjà les deviner ?).

Quant à la troisième hypothèse, elle n'est pas très importante non plus. Remarquons que si (X, d) est un espace métrique, $(X, \phi(d))$ est également un espace métrique, définissant la même topologie, tout aussi homogène que le premier, dès que $\phi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ est sous-additif, c'est-à-dire tel que $\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t)$. Si l'on supprime la troisième hypothèse, la conclusion du théorème est à peine affaiblie : l'espace (X, d) est alors obtenu par cette construction en partant de l'un des trois exemples précédents, euclidien, elliptique ou hyperbolique.

Nous reviendrons sur ces « détails » plus loin mais retenons le fait fondamental que *les géométries euclidienne, elliptique et hyperbolique sont essentiellement les seules surfaces métriques homogènes.*

À vrai dire ces trois géométries (X, d) sont beaucoup plus qu'homogènes. Si Y

³Un espace topologique est de dimension topologique inférieure ou égale à d s'il admet des recouvrements ouverts arbitrairement fins tels que pour chacun d'entre eux l'intersection de $(d+2)$ ouverts différents est vide. Par exemple, le produit de deux graphes est de dimension 2 mais n'est pas une surface en général.

est une partie quelconque de X et si $f : Y \rightarrow X$ est une isométrie sur son image, alors f est la restriction d'une isométrie globale de X . Si Y ne contient qu'un point, c'est l'homogénéité usuelle ; si Y contient deux points, c'est la 2-homogénéité, etc.

4 Des modèles, beaucoup de modèles

Des objets homogènes de dimension 2 se présentent naturellement dans de nombreuses situations. Le théorème précédent permet alors de les identifier à l'une des trois géométries. C'est ainsi que les *modèles* de la géométrie hyperbolique abondent dans la littérature. Même si le but de ce chapitre n'est pas de discuter l'aspect épistémologique des géométries non euclidiennes, remarquons l'usage courant du mot « modèle » dans ce contexte : tout se passe comme si cette géométrie avait une existence intrinsèque « idéale » que les mathématiciens essaient d'appréhender en en construisant quelques « illustrations ».

Je vais décrire ici quelques-uns de ces modèles, mais il y en a beaucoup d'autres (voir par exemple [2, 46, 67, 70]).

Le *premier* n'est qu'un changement de variables bien anodin : la transformation

$$z \mapsto \frac{1}{z - i}$$

envoie le disque \mathbf{D} sur le *demi-plan de Poincaré*⁴ $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

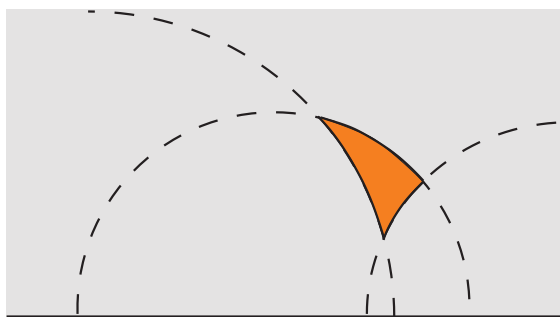


FIG. 2 – Triangle dans le demi-plan

Dans ce demi-plan, la métrique hyperbolique devient $|dz|/\text{Im } z$ et les géodésiques sont les demi-cercles (ou demi-droites) orthogonaux au bord (voir figure 2). Ce modèle présente l'avantage que le groupe d'isométries directes (c.-à-d. qui respectent l'orientation) s'exprime de manière plus simple :

$$z \in \mathbf{H} \mapsto \frac{Az + B}{Cz + D} \in \mathbf{H}$$

⁴On parle parfois de plan de Lobatchevski, ce qui pourrait bien sûr parfaitement se justifier, mais dans un ouvrage consacré à l'héritage de Poincaré...

avec A, B, C, D réels tels que $AD - BC = 1$. On reconnaît le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

Avec les modèles du disque et du demi-plan, on peut déjà faire beaucoup de calculs. On peut facilement s'assurer que le cinquième postulat d'Euclide n'est pas valable dans cette géométrie : un point x extérieur à une géodésique γ étant donné, il existe une infinité de géodésiques qui passent par x et qui sont « parallèles » à γ , c'est-à-dire qui ne rencontrent pas γ (figure 3).

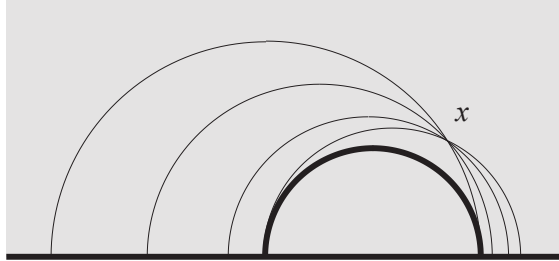


FIG. 3 – Le cinquième postulat

Voici un modèle moins connu. On considère l'ensemble \mathcal{E} des ellipses du plan euclidien, centrées à l'origine, bordant un domaine d'aire 1. On peut penser à une telle ellipse e comme la sphère unité d'une norme $\|\cdot\|_e$ dans \mathbf{R}^2 . Si e_1 et e_2 sont deux éléments de \mathcal{E} , on peut les comparer en posant

$$\mathrm{dist}(e_1, e_2) = \log \sup_{v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{\|v\|_{e_1}}{\|v\|_{e_2}}.$$

Un instant de réflexion suffira au lecteur pour vérifier que :

- dist est bien une distance (géodésique?) ;
- $(\mathcal{E}, \mathrm{dist})$ est une surface (car deux paramètres suffisent pour décrire un élément de \mathcal{E}) ;
- $(\mathcal{E}, \mathrm{dist})$ est homogène (il n'y a qu'une ellipse à transformation affine près).

Un autre instant de réflexion le convaincra également que $(\mathcal{E}, \mathrm{dist})$ n'est ni euclidien ni elliptique. C'est donc un modèle du disque de Poincaré!

Il reste à exhiber une isométrie explicite entre $(\mathcal{E}, \mathrm{dist})$ et $(\mathbf{D}, \mathrm{dist}_{\mathrm{hyp}})$. Cela ne pose bien sûr aucun problème. À chaque point du disque de la forme $\rho \exp(i\phi)$, on associe l'ellipse d'ellipticité⁵ $\rho < 1$ dont le grand axe fait un angle $\phi/2$ avec l'axe réel. La vérification que cette bijection est bien une isométrie n'est qu'un exercice de routine.

Ce modèle laisse entrevoir une généralisation : l'espace des convexes symétriques de volume 1 dans \mathbf{R}^n est naturellement un espace métrique.

Un autre modèle : *la métrique de Hilbert* [43, Ap. I]. Soit C un ouvert borné convexe de \mathbf{R}^2 . Si x, y sont deux points de C , la droite (xy) les joignant rencontre C sur un intervalle ouvert $]u, v[$ (voir figure 4).

⁵L'ellipticité d'une ellipse d'axes $b \leq a$ est $(a - b)/(a + b)$. Ne pas confondre avec l'excentricité.

On pose

$$\text{dist}_{\text{Hilbert}}(x, y) = |\log[u : v : x : y]|$$

où l'on utilise cette fois le birapport des quatre points u, x, y, v de la droite réelle (auparavant, nous utilisons le birapport de quatre points de la droite complexe).

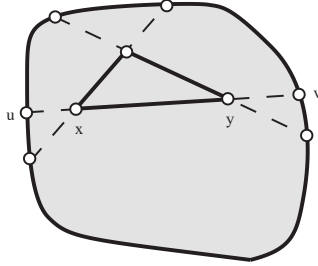


FIG. 4 – Distance de Hilbert

Ici encore, il n'est pas difficile de s'assurer que $\text{dist}_{\text{Hilbert}}$ est une distance géodésique (méditez la figure 4 en n'oubliant pas que le birapport est invariant par projection). Évidemment, cette distance est invariante par le groupe des transformations projectives qui préservent C . Dans le cas particulier où C est l'intérieur d'une ellipse, ce groupe agit transitivement sur C (exercice)⁶ et l'espace métrique ainsi obtenu est homogène. Nous avons ainsi trouvé une version du disque de Poincaré dans l'intérieur d'une ellipse, souvent appelée « modèle de Klein ». Trouver une isométrie entre $(C, \text{dist}_{\text{Hilbert}})$ et $(\mathbf{D}, \text{dist}_{\text{hyp}})$ est moins facile. Notez que les deux modèles sont très différents : les géodésiques dans le modèle de Klein sont les segments de droites alors que celles du disque de Poincaré sont des arcs de cercle. Il n'est pas clair *a priori* qu'il existe un homéomorphisme du disque qui transforme les segments de droites en des arcs de cercle. Voici une méthode : considérons les équations du second degré d'inconnue z de la forme $(1 - a)z^2 + 2bz + (1 + a) = 0$, avec a, b réels, de discriminant $4(a^2 + b^2 - 1)$. Ainsi, à chaque point $(a + ib)$ du disque unité, on peut associer une équation du second degré qui a une unique solution z_{a+ib} dans le demi-plan supérieur \mathbf{H} . Un exercice agréable consiste à montrer que la transformation $(a + ib) \in \mathbf{D} \mapsto z_{a+ib} \in \mathbf{H}$ réalise une isométrie entre la métrique de Klein et celle de Poincaré (vue dans le demi-plan).

La métrique de Hilbert est très intéressante (voir [42] pour de nombreux exemples et développements). Notons que l'ellipse n'est pas le seul convexe projectivement homogène : l'intérieur d'un triangle l'est également⁷. Quelle est la métrique de Hilbert dans ce cas ?

⁶On peut citer ici la jolie conséquence qu'en tire Hilbert : il est impossible de construire le centre d'un cercle à l'aide d'une règle seulement. En effet, s'il existait une telle construction, sa conjuguée par une transformation projective préservant le cercle construirait n'importe quel point du disque : contradiction !

⁷Ainsi l'argument précédent de Hilbert montre que le barycentre d'un triangle ne peut pas se construire avec une règle seulement ; plus surprenant que pour le centre d'un cercle ?

5 Tentatives de visualisation dans l'espace

Même si Riemann nous a enseigné qu'on peut (doit ?) faire de la géométrie sur une variété riemannienne abstraite, beaucoup d'entre nous aiment visualiser les surfaces comme plongées dans l'espace euclidien.

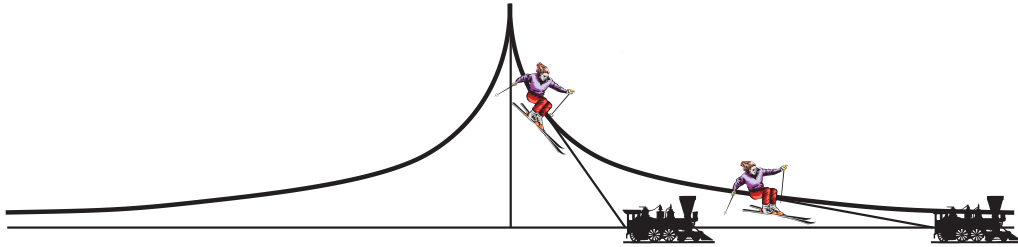


FIG. 5 – Tractrice

Une application différentiable $\phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^N$ est une *immersion isométrique* si pour tout vecteur tangent v au disque, on a $\|v\|_{\text{hyp}} = \|d\phi(v)\|_{\text{eucl}}$. Si de plus ϕ est injective, on parle de *plongement isométrique*. On prendra garde au fait que ceci n'entraîne pas que ϕ est une isométrie sur son image, mais seulement que la longueur hyperbolique d'une courbe tracée dans \mathbf{D} est égale à la longueur euclidienne de la courbe image par ϕ . D'ailleurs, il n'existe pas d'application $\phi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^N$ qui soit une isométrie sur son image, car une telle application devrait envoyer une géodésique sur une droite et son image devrait donc être contenue dans un plan euclidien, ce qui est bien sûr impossible.

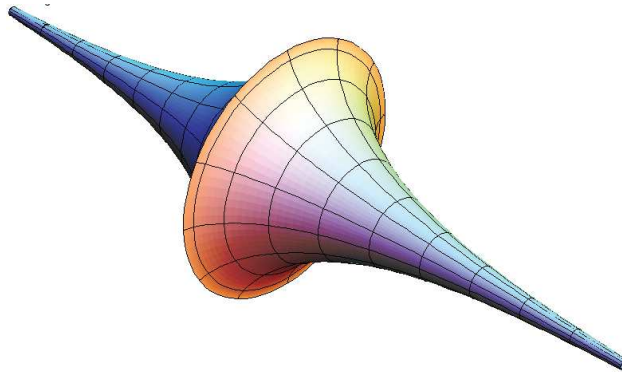


FIG. 6 – Pseudosphère

Très tôt, Beltrami a essayé de construire un plongement isométrique du disque hyperbolique dans \mathbf{R}^3 . Il y est parvenu *localement* par une méthode très simple. On considère une surface de révolution dont l'équation en coordonnées cylindriques (r, z) est de la forme $r = F(z)$. Chercher F pour que la surface soit isométrique au disque de Poincaré revient à résoudre une équation différentielle ordinaire du second ordre. Parmi ses solutions, on trouve la *tractrice*, courbe suivie par un objet tiré par une corde de longueur constante et dont l'extrémité libre se déplace sur une droite

(figure 5). Ainsi, la tractrice de révolution, souvent appelée *pseudosphère* (figure 6), est un modèle local du disque de Poincaré [55].

Il se trouve cependant que cette tractrice présente un point singulier (de rebroussement) de sorte que la surface de révolution est également singulière le long d'un cercle de rebroussement. On n'obtient donc qu'un morceau de surface isométrique à un morceau du disque. La partie gauche de la figure 7 (extraite de [63]) montre un disque de petit rayon dans \mathbf{D} et son image isométrique dans la pseudosphère. La partie droite montre une partie de \mathbf{D} (d'aire 2π) isométrique au complémentaire d'une génératrice dans une demi-pseudosphère.

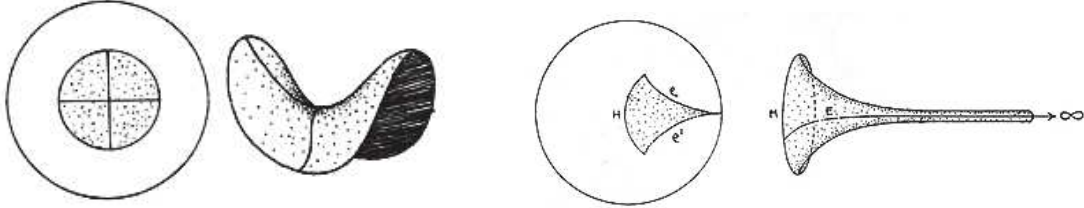


FIG. 7 – Pseudosphère et disque

D'ailleurs, on ne peut pas échapper à ces singularités : Hilbert a démontré⁸ qu'il n'existe pas de plongement isométrique de classe C^2 du disque de Poincaré dans l'espace euclidien de dimension 3. La démonstration est astucieuse : elle consiste en une analyse détaillée des deux familles de lignes asymptotiques⁹ sur une surface de \mathbf{R}^3 localement isométrique au disque. Ces courbes constituent un *réseau de Tchebychev*, notion introduite pour un problème très concret dans un article intitulé *Sur la coupe des vêtements* [68]. On considère un tissu dans le plan formé d'une trame de fils entrecroisés

$$x = i/N, \quad y = j/N, \quad i, j = 0, \dots, N \quad (\text{avec } N \text{ grand}).$$

On déforme ensuite le tissu dans l'espace de façon que les côtés de chaque maille, formant initialement un carré, restent de longueur constante. Autrement dit, on considère les surfaces « habillées » par le tissu $u : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ telles que $\partial u / \partial x$ et $\partial u / \partial y$ soient partout de norme 1 (mais pas nécessairement orthogonaux).

Il se trouve que les lignes asymptotiques d'une surface localement isométrique au disque de Poincaré habillent cette surface dans le sens précédent (voir figure 8). C'est le point de départ de la preuve de Hilbert. Pour la suite (intéressante) voir [20, 28, 43]. Il est remarquable de constater que ce problème de Tchebychev continue à se développer ; outre le fait qu'il s'est avéré intimement lié aux équations aux dérivées

⁸À vrai dire, Hilbert supposait le plongement analytique et ce n'est que bien plus tard que la version C^2 a été démontrée.

⁹Soit m un point sur une surface lisse S plongée dans \mathbf{R}^3 . Notons Π le plan tangent en m et N la droite normale. Localement, S est le graphe d'une application u d'un voisinage de m dans Π vers N . La différentielle seconde de u en m est la *seconde forme quadratique fondamentale* au point m . Les directions isotropes de cette forme quadratique, si elles existent, sont les *directions asymptotiques* et les courbes partout tangentes à l'une de ces directions sont les *lignes asymptotiques* de S [20].

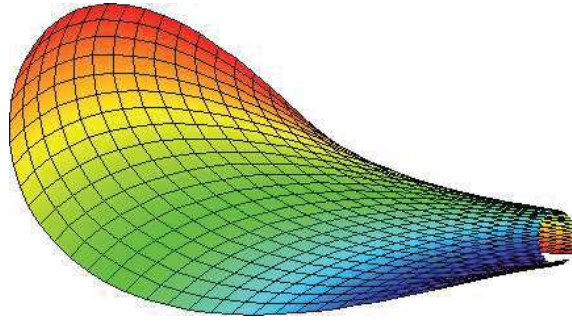


FIG. 8 – Habillage d’une partie de la pseudosphère

partielles dites de sine-Gordon, on utilise ce type d’idées dans la construction de certains matériaux d’aujourd’hui (voir par exemple [61]).

La preuve du théorème de Hilbert ne peut pas être très élémentaire car ce théorème est faux en classe C^1 . Il résulte d’un théorème de Nash que le disque de Poincaré peut se plonger isométriquement *en classe C^1* dans l’espace \mathbf{R}^3 [35, 52].

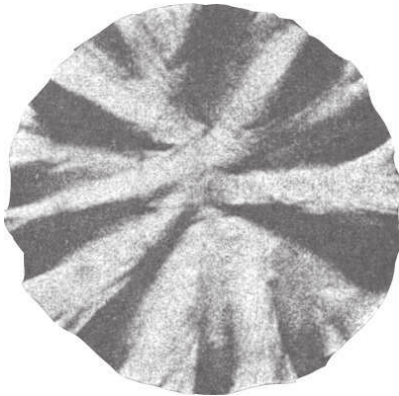


FIG. 9 – Modèle de Beltrami [16]



FIG. 10 – Origami hyperbolique [67]

À quoi ressemblent ces plongements ? Il est très utile d’en construire des modèles concrets, par exemple en papier, comme l’a fait Beltrami dès le dix-neuvième siècle (figure 9). Prenez un grand nombre de triangles équilatéraux en carton, disons de quelques centimètres de côté, collez-les bord à bord en prenant soin que chaque sommet soit entouré par 7 triangles : vous obtenez une approximation d’un morceau d’un disque de Poincaré (figure 10). Notez qu’en remplaçant 7 par 6, vous construisez un plan euclidien pavé de la manière habituelle par des triangles équilatéraux. En utilisant 5 triangles autour de chaque sommet, on construit une sphère, pavée comme un dodécaèdre. (Que se passe-t-il avec 4, 3, 2 triangles, avec 8, 9, etc ?).

Le site internet remarquable [67] propose une introduction visuelle à la géométrie hyperbolique. Un autre site internet [69] contient une exposition virtuelle visant à donner une intuition de ce type d’objets. On y donne même des instructions pour réaliser un disque de Poincaré au crochet (figure 11) !



FIG. 11 – Crochet hyperbolique [69]

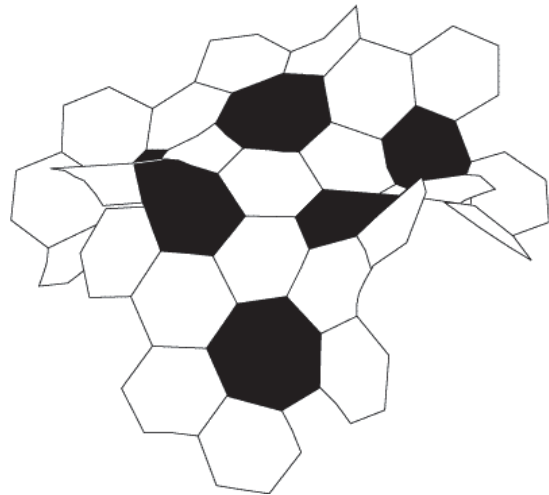


FIG. 12 – Foot hyperbolique [69]

Dans [58], les auteurs n'hésitent pas à évoquer les « jupes à godets » et comparent la pseudosphère à un lis :



FIG. 13 – Jupe à godets



FIG. 14 – Lis Calla

Bien sûr, on dispose de théorèmes généraux de plongements isométriques de variétés riemanniennes de classe C^∞ dans des espaces euclidiens de dimension suffisante. D'après Gromov [35] (généralisant des travaux de Nash), une variété riemannienne de dimension k se plonge isométriquement en classe C^∞ dans un espace euclidien de dimension $(k+2)(k+3)/2$. En ce qui concerne l'espace hyperbolique de dimension k (dont nous n'avons discuté ici que la version de dimension 2), il existe une immersion isométrique de classe C^∞ (peut-être non injective) dans un espace euclidien de dimension $(5k-5)$. En fait, Blanuša a construit en 1955 un plongement *explicite* de classe C^∞ du disque de Poincaré dans \mathbf{R}^6 [14]. Le disque peut-il être immergé isométriquement dans \mathbf{R}^4 ? Cela semble une question ouverte. Gromov démontre

cependant que toute partie compacte du disque peut s'immerger isométriquement dans n'importe quel¹⁰ ouvert (non vide!) de \mathbf{R}^4 .

De tels plongements sont en fait de peu d'utilité, car ils ne peuvent pas être naturels. Un plongement *naturel* serait un plongement $i : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^N$ tel que pour toute isométrie f de \mathbf{D} , il existe une isométrie \bar{f} de \mathbf{R}^N telle que $i \circ f = \bar{f} \circ i$. Un tel plongement ne peut pas exister pour des raisons purement algébriques : il n'existe pas d'homomorphisme non trivial du groupe des isométries (directes) du disque vers le groupe des isométries d'un espace euclidien (exercice, pas trop facile!).

Il existe en revanche des plongements naturels en dimension *infinie*. Je montrerai plus loin une construction explicite d'un plongement $i : \mathbf{D} \rightarrow H$, où H est un espace de Hilbert, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\text{dist}_{\text{hyp}}(x, y) = \|i(x) - i(y)\|^2$, pour tous x, y de \mathbf{D} ;
- i est naturel dans le sens précédent.

6 Un peu de géométrie des triangles

Le théorème le plus célèbre de géométrie hyperbolique est dû à Gauß [31] :

Théorème. *L'aire d'un triangle dont les angles sont α, β, γ est $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.*

Avant d'esquisser deux preuves de ce théorème (il y en a beaucoup d'autres), il faut expliquer les mots « triangle, angle, aire ». Le disque de Poincaré est une variété riemannienne dont la métrique $ds = |dz|/(1 - |z|^2)$ est *conforme* à la métrique euclidienne $|dz|$; cela signifie que les angles entre deux vecteurs tangents en un même point du disque sont les mêmes selon qu'on les calcule pour ds ou pour $|dz|$. L'élément d'aire hyperbolique est donné par $d \text{aire}_{\text{hyp}} = (1 - |z|^2)^{-2} d \text{aire}_{\text{eucl}}$.

Un triangle doit bien sûr être compris comme étant défini par trois points et limité par trois segments géodésiques ; il a donc trois angles et une aire.

Il est facile de s'assurer que la somme des angles d'un triangle est bien inférieure à π (placez l'un des sommets au centre du disque et comparez les angles du triangle hyperbolique et du triangle euclidien de mêmes sommets).

La première esquisse de preuve du théorème nécessiterait peut-être quelques développements pour la confirmer, mais elle est assez intuitive. Si P est un polygone

¹⁰On pourrait croire qu'il est nécessaire que le diamètre de l'ouvert soit supérieur à celui du compact mais il n'en est rien : un plongement isométrique n'est pas une isométrie ! Par exemple, un plongement isométrique de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^3 n'est autre qu'une courbe plongée, paramétrée par son abscisse curviligne ; il n'est pas difficile d'« embobiner » une telle courbe dans une boule arbitrairement petite.

géodésique à n côtés et d'angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on pose

$$\mathcal{A}(P) = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

On remarque alors que :

— si on découpe P en deux polygones P_1, P_2 le long d'une géodésique, on a évidemment $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2)$ (voir figure 15) ;

— si P est un triangle de petit diamètre, $\mathcal{A}(P)$ est petit (« car » dans un petit voisinage, une métrique riemannienne est « presque » euclidienne : c'est un point qu'il faudrait préciser) ;

— \mathcal{A} est bien sûr invariant par isométries.

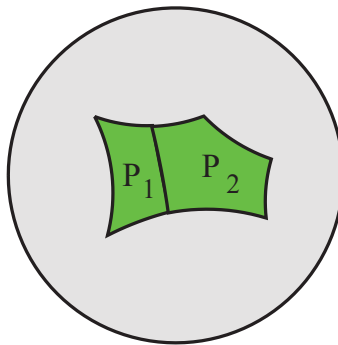


FIG. 15 – Découpage d'un polygone

On peut alors mimer la construction classique de la mesure de Lebesgue dans le plan. On utilise $\mathcal{A}(P)$ comme mesure d'un polygone et on définit la mesure d'un borélien en utilisant des recouvrements par des polygones. Ainsi, \mathcal{A} définit une mesure sur le disque invariante par isométries. L'homogénéité montre donc que \mathcal{A} est un multiple constant de l'aire hyperbolique. Nous avons donc « établi » que

$$\text{aire}(P) = c \left((n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)$$

et il reste à déterminer la constante c . Nous ne le ferons pas, car ce calcul n'a pas d'intérêt particulier ; mais surtout parce qu'en multipliant la métrique de Poincaré par une constante λ strictement positive, la constante c est divisée par λ^2 . En fait, le choix de la constante dans la définition de la métrique de Poincaré est surtout dicté par le désir de normaliser la constante c à la valeur 1, ce qui est possible puisque nous savons déjà que c est strictement positive.

Voici une deuxième preuve, plus convaincante. Trois points sur le bord de \mathbf{D} déterminent un *triangle idéal* dont les « sommets » sont « à l'infini » (voir figure 16). Ces triangles idéaux, bien que non bornés, sont d'aire bornée. Cela résulte du fait

que deux géodésiques qui convergent vers le même point du bord se rapprochent à une vitesse exponentielle (au sens hyperbolique bien sûr) de sorte que l'intégrale d'aire converge. Puisque le groupe des isométries du disque opère transitivement sur les triplets de points distincts du bord (exercice), tous ces triangles idéaux ont la même aire. Il se trouve que cette aire vaut π (calcul!).

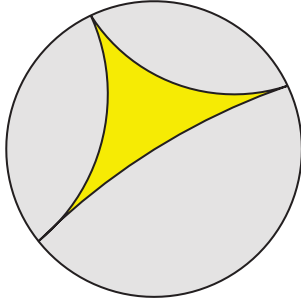


FIG. 16 – Triangle idéal

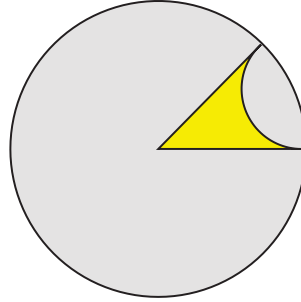


FIG. 17 – $T(\alpha)$

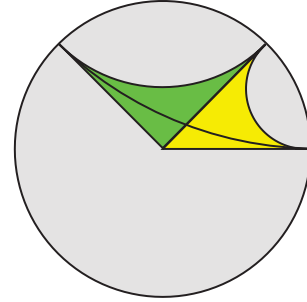


FIG. 18 – $T(\alpha + \beta)$

Considérons maintenant le triangle $T(\alpha)$ dont un angle est $\alpha \in [0, \pi]$ et dont les deux autres sommets sont à l'infini (figure 17).

La figure 18 montre que

$$\text{aire}(T(\alpha + \beta)) = \text{aire}(T(\alpha)) + \text{aire}(T(\beta)) - \pi$$

d'où il résulte que $F(\alpha) = \pi - \text{aire}(T(\alpha))$ vérifie $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$. Puisque F est continue, il existe une constante c telle que $F(\alpha) = c\alpha$ et comme $\text{aire}(T(\pi)) = 0$, on obtient $c = 1$ et $\text{aire}(T(\alpha)) = \pi - \alpha$.

Considérons finalement un « vrai » triangle $T(\alpha, \beta, \gamma)$ dont les trois sommets sont à « distance finie » (figure 19). En prolongeant les côtés jusqu'à l'infini, on obtient un hexagone idéal.

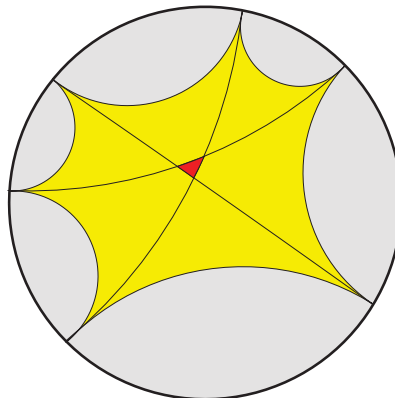


FIG. 19 – Hexagone idéal

Chaque sommet du triangle détermine deux copies isométriques de $T(\alpha)$, $T(\beta)$, $T(\gamma)$ respectivement, dont l'une contient $T(\alpha, \beta, \gamma)$. L'aire de l'hexagone est donc

$$2[(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)] - 2 \text{ aire}(T(\alpha, \beta, \gamma)).$$

Comme par ailleurs cet hexagone se découpe évidemment en quatre triangles idéaux, son aire vaut 4π . On obtient bien comme annoncé

$$\text{aire}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Je propose un « exercice d'application » pour terminer ce paragraphe. Euclide a (presque) montré dans les *Éléments* que si deux polygones P et Q du plan euclidien ont la même aire, on peut découper chacun d'entre eux en un nombre fini de polygones P_1, \dots, P_n et Q_1, \dots, Q_n de telle sorte que pour tout i les « morceaux » P_i et Q_i soient isométriques [30, livre VI]. Montrez que la même chose est vraie dans le disque de Poincaré. Cette propriété n'est plus vraie en dimension supérieure et mène à des développements fascinants autour du troisième problème de Hilbert : deux polyèdres de même volume dans l'espace euclidien peuvent-ils être découpés en morceaux isométriques ? Voir [15] pour une introduction élémentaire et [21] pour plus d'information.

7 Le disque est un arbre

Il résulte de la formule de Gauß que l'aire d'un triangle est bornée par π . Étrange géométrie dans laquelle les triangles peuvent être arbitrairement grands en taille mais dont l'aire est bornée !

L'aire hyperbolique d'un disque de rayon ρ est facile à calculer :

$$A(\rho) = \int_0^{\text{th} \rho} \frac{2\pi t}{(1-t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2}(\text{ch} \rho - 1).$$

On constate donc que cette aire tend vers l'infini quand le rayon tend vers l'infini (exponentiellement rapidement — nous reviendrons sur ce point).

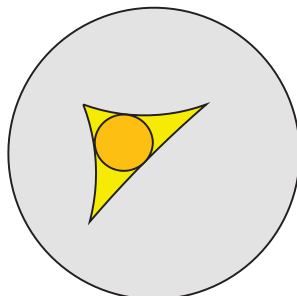


FIG. 20 – Cercle inscrit

Il en résulte que le rayon ρ du cercle inscrit dans un triangle est *borné* indépendamment du triangle puisque $\frac{\pi}{2}(\operatorname{ch} \rho - 1) \leq \pi$ entraîne $\rho \leq 1$ (figure 20). Par conséquent, en géométrie hyperbolique, les triangles sont *fins* : chaque côté n'est pas très éloigné de la réunion des deux autres.

Définition. On dit qu'un espace métrique géodésique (X, d) est δ -hyperbolique si, pour tout triplet de points (x, y, z) et tout choix de géodésiques $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ les connectant deux à deux, tout point de $[x, y]$ est à une distance inférieure à δ d'un point de $[x, z]$ ou de $[z, y]$.

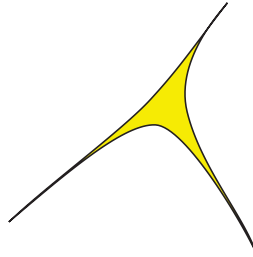


FIG. 21 – Triangle fin

C'est Gromov qui a extrait cette propriété de la géométrie du disque de Poincaré et qui a reconnu que cette définition anodine capture l'essentiel de cette géométrie [36]. Un espace métrique (X, d) borné est bien sûr δ -hyperbolique avec $\delta = \operatorname{diam}(X, d)$, mais il est évident que ce cas particulier est sans intérêt. La théorie n'est intéressante que pour les espaces non bornés. Nous avons vu par exemple que le disque de Poincaré est δ -hyperbolique avec $\delta = 2$. De nombreux espaces métriques sont δ -hyperboliques et sont donc les cousins du disque. À regret, je resterai cependant dans le disque !

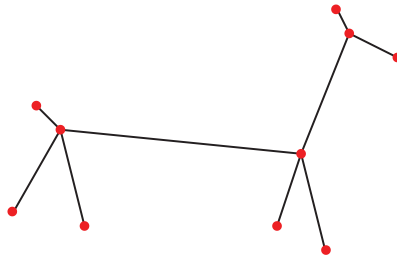


FIG. 22 – Arbre métrique

Une autre manière d'exprimer la δ -hyperbolicité du disque de Poincaré consiste à dire que la réunion $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ des trois côtés d'un triangle de sommets x, y, z est à distance bornée de la réunion $[x, o] \cup [y, o] \cup [z, o]$ où o désigne le centre du cercle inscrit : la réunion des trois côtés est proche d'un Y (voir figure 21). Il se trouve que cette propriété se généralise à toute partie finie, qui peut être approchée par un arbre¹¹ fini, avec une erreur qui ne dépend que du nombre de points.

¹¹Un arbre est un graphe connexe sans cycle.

Précisons cet énoncé. Si on choisit une longueur arbitraire pour chaque arête d'un arbre fini, on peut construire une réalisation métrique de l'arbre : on attache des segments euclidiens ayant les longueurs choisies en leurs extrémités en suivant la combinatoire de l'arbre. Par définition, la distance entre deux points est la longueur du plus petit chemin les connectant. On appelle *arbre métrique* un espace métrique géodésique construit de cette façon (voir figure 22).

Proposition. *Considérons n points x_1, \dots, x_n d'un espace métrique δ -hyperbolique (X, d) . Alors, il existe un arbre métrique (A, d_A) et n points x'_1, \dots, x'_n de A tels que*

$$d(x_i, x_j) - 100 \delta \log n \leq d_A(x'_i, x'_j) \leq d(x_i, x_j)$$

pour tous i, j .

Sur la photographie d'une « salade hyperbolique », on voit bien les nervures arborescentes qui approchent l'ensemble.



FIG. 23 – Salade hyperbolique

J'insiste encore sur le fait que le « défaut d'isométrie » $100 \delta \log n$ dépend (un peu) de n mais pas des points x_i qui peuvent être très éloignés les uns des autres.

La démonstration de cette proposition n'est pas difficile, mais astucieuse. Le lecteur pourra commencer par essayer de la construire par lui-même puis, en cas d'échec, il ira consulter [32, 36] pour apprécier la virtuosité avec laquelle Gromov manipule l'inégalité triangulaire !

Ainsi, si nous voulons dessiner dans le disque de Poincaré des figures formées d'un grand nombre de points très éloignés les uns des autres, le résultat est proche d'un arbre. Très souvent, cela donne une bonne intuition de la géométrie hyperbolique (figure 24).



FIG. 24 – Cactus approchant la géométrie du disque

Si (X, d) est un espace métrique δ -hyperbolique, on peut diviser la distance par une (grande) constante $k > 0$ et poser $d_k = d/k$. Cela revient à regarder l'espace (X, d) « de loin » et l'espace métrique qui en résulte est bien sûr (δ/k) -hyperbolique. Si k tend vers l'infini, le défaut $100 \frac{\delta}{k} \log n$ d'approximation par les arbres tend vers 0 (n étant fixé), c'est-à-dire que « l'espace (X, d_k) tend vers un arbre ». On peut donner un sens précis à la phrase précédente. Je ne le ferai cependant pas, car ceci nous conduirait à discuter de topologie de Hausdorff-Gromov sur l'espace des espaces métriques, d'ultrafiltres, etc. Le lecteur intéressé pourra consulter [38].

Quoi qu'il en soit, retenons que *le disque de Poincaré, vu de loin, ressemble à un arbre.*

8 Quelques exemples d'intuitions dendrologiques

La géométrie dendrologique¹² est souvent intuitive. Nous allons voir sur quelques exemples simples comment elle peut guider notre compréhension de la géométrie hyperbolique.

Le théorème de Pythagore

Comparons les triangles rectangles du plan euclidien, d'un arbre et du disque.

Dire que le triangle ABC est « rectangle en A », c'est dire que A est le pied de la hauteur abaissée de C sur la droite (AB) , ou encore que A est le point le plus proche de C situé sur AB . En géométrie dendrologique, les triangles rectangles sont donc ceux pour lesquels le plus court chemin de C à B passe par A , autrement dit ceux pour lesquels $BC = AB + AC$ (figure 25). Dans les arbres, le théorème de Pythagore a « perdu son carré » : l'hypoténuse est la somme des côtés. Qu'en est-il pour le disque de Poincaré ? On trouve dans les livres le théorème de Pythagore

¹²DENDROLOGIE *n.f.*—1641 ; de *dendro* et *-logie* ◊ DIDACT. Partie de la botanique qui étudie les arbres. (Le Petit Robert.)

hyperbolique :

$$\operatorname{ch} BC = \operatorname{ch} AB \cdot \operatorname{ch} AC.$$

Si l'on tient compte du fait que $\operatorname{ch} x \simeq \exp(x)/2$ (pour x réel grand), on trouve que $BC \simeq AB + AC$ comme notre intuition dendrologique nous l'avait suggéré.



FIG. 25 – Triangles rectangles

La croissance et la transience

Puisque le disque de Poincaré est homogène, nous devons le comparer à un arbre homogène. Considérons par exemple l'arbre homogène infini dont tous les sommets sont de valence 3 (figure 26).

La boule centrée en un point x_0 et de rayon n contient $3 \cdot 2^{n-1}$ sommets. Nous retrouvons ce que nous avons déjà rencontré : le volume d'une boule croît exponentiellement en fonction de son rayon.

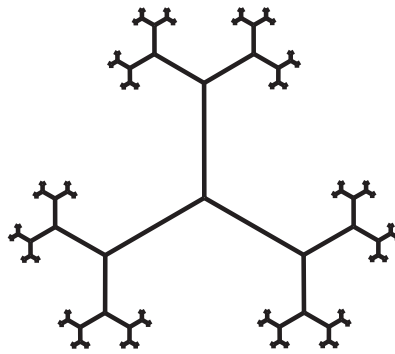


FIG. 26 – Arbre homogène

Considérons maintenant une *marche aléatoire* dans l'arbre. Un point part du sommet x_0 et saute aléatoirement chaque seconde sur l'un des trois sommets qui lui sont voisins, de manière équiprobable. Notons $d(n)$ la distance entre le point x_n à l'instant n et son point de départ x_0 . Si $d(n) \neq 0$, alors $d(n+1) = d(n) + 1$ avec une probabilité $2/3$ et $d(n+1) = d(n) - 1$ avec une probabilité $1/3$. En revanche, si $d(n) = 0$ on a $d(n+1) = 1$. Il y a donc une tendance nette à fuir vers l'infini. Il n'est pas difficile d'en déduire que presque sûrement :

- $d(n)/n$ tend vers $1/3$ (en particulier $d(n)$ tend vers l'infini) ;
- la géodésique $[x_0, x_n]$ tend vers une géodésique infinie $\gamma = [x_0, x_\infty[$ et la distance entre x_n et γ est bornée par $Ct \cdot \log n$.

La même chose se passe dans le disque de Poincaré pour le *mouvement brownien*. Pour toute variété riemannienne M et pour tout point x_0 , il existe une mesure de probabilité, dite *mesure de Wiener*, sur l'espace des chemins $\gamma : \mathbf{R}^+ \rightarrow M$ issus de x_0 (voir par exemple [26, 53]). Pour le disque de Poincaré :

- presque toute courbe $\gamma : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{D}$ issue d'un point converge vers un point du bord $\omega(\gamma) \in \partial\mathbf{D}$;
- presque sûrement la distance hyperbolique entre $\gamma(t)$ et la géodésique $[x_0, \omega(\gamma)[$ est bornée par $Ct \cdot \log t$.

La preuve est bien sûr plus difficile que dans le cas des arbres mais au fond, c'est la même...



FIG. 27 – Trajectoire brownienne dans le disque

Le fait qu'une marche aléatoire fuie vers l'infini peut aussi s'exprimer en termes de comportement des solutions de l'équation de la chaleur lorsque le temps tend vers l'infini. D. Sullivan m'a expliqué qu'il est presque impossible de chauffer les maisons dans le disque de Poincaré, car on ne peut empêcher la chaleur de s'échapper vers l'infini !

Les quasi-géodésiques

L'un des attraits de la géométrie hyperbolique est sa robustesse. Nous allons l'illustrer ici dans un exemple simple mais fondamental.

Une courbe $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow X$ dans un espace métrique (X, d) est une *quasi-géodésique* s'il existe a et $b > 0$ tels que, pour tous t_1, t_2 , on ait :

$$a^{-1}|t_1 - t_2| - b \leq d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq a|t_1 - t_2| + b.$$

Théorème. *Toute quasi-géodésique d'un espace métrique δ -hyperbolique est à une distance bornée d'une géodésique.*

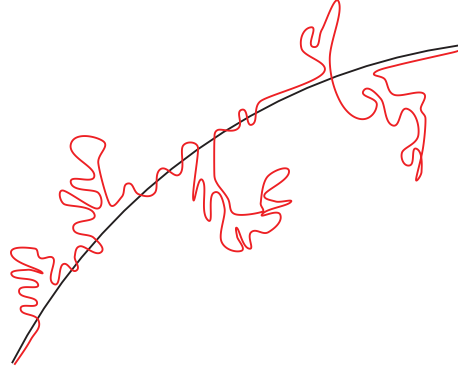


FIG. 28 – Quasi-géodésique

L'idée de la démonstration consiste d'abord à étudier le cas d'un arbre. Une quasi-géodésique dans un arbre peut repasser plusieurs fois par le même sommet, mais ces événements ne peuvent se passer en des temps très différents ($\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ entraîne $|t_1 - t_2| \leq ab$). Il en résulte qu'une quasi-géodésique dans un arbre consiste en fait en une géodésique sur laquelle on greffe quelques allers-retours de taille bornée (figure 28). Le cas général n'est qu'une adaptation du cas particulier de l'arbre (voir par exemple [32]).

Voici un exemple d'application. Considérons une métrique riemannienne g sur le disque qui est en rapport borné avec la métrique hyperbolique. Cela signifie qu'il existe une constante $Ct > 1$ telle que pour tout vecteur tangent v , le rapport entre la g -norme et la norme hyperbolique de v est compris entre Ct^{-1} et Ct . Alors, une géodésique $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{D}$ pour la métrique g est évidemment une quasi-géodésique pour la métrique hyperbolique : elle reste donc à distance bornée d'une géodésique de la métrique hyperbolique. Ceci permet d'associer de manière canonique une géodésique de Poincaré à une géodésique¹³ de g . C'est le point de départ du phénomène de la *stabilité structurelle* du flot géodésique des variétés compactes à courbure négative : le comportement qualitatif des géodésiques ne dépend pas (trop) du choix de la métrique. Il s'agit d'une longue histoire qui nous entraînerait trop loin de la quasi-géodésique que nous essayons de suivre dans ce chapitre et qui nous conduirait de Hadamard à Gromov en passant par Anosov [5, 34, 41]...

Sensibilité aux conditions initiales

Considérons deux géodésiques $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^2$ dans le plan euclidien (c.-à-d. deux demi-droites). Soit $\varepsilon > 0$ (petit) et $T > 0$ (grand). Supposons que γ_1 et γ_2 coïncident en $t = 0$ et soient proches au temps T , c'est-à-dire

$$\text{dist}_{\text{eucl}}(\gamma_1(T), \gamma_2(T)) \leq \varepsilon.$$

Alors, le théorème de Thalès affirme que

$$\text{dist}_{\text{eucl}}(\gamma_1(2T), \gamma_2(2T)) \leq 2\varepsilon.$$

¹³Dans ce texte, une géodésique est par définition une courbe qui minimise la longueur entre deux points quelconques, même éloignés. On parle d'ordinaire de *géodésiques minimisantes*.

Autrement dit, après un temps double, la distance entre $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ n'a fait que doubler : elle est donc restée petite (figure 29-a).

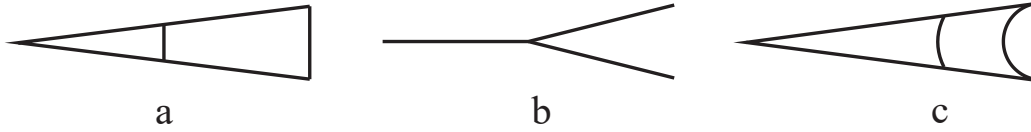


FIG. 29 – Théorème de Thalès

Considérons maintenant le cas d'un arbre. La figure 29-b montre deux géodésiques issues du même point qui coïncident jusqu'au temps T et qui divergent ensuite, dans le sens où $\text{dist}(\gamma_1(2T), \gamma_2(2T)) = 2T$. Le fait que γ_1 et γ_2 restent proches sur $[0, T]$ (et même coïncident) n'entraîne donc aucune estimation sur $\text{dist}(\gamma_1(2T), \gamma_2(2T))$ (autre que l'inégalité triangulaire). Pas de théorème de Thalès en géométrie dendrologique !

Le même phénomène se produit dans le disque. Considérons deux géodésiques γ_1 et $\gamma_2 : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{D}$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\text{dist}_{\text{hyp}}(\gamma_1(T), \gamma_2(T)) = \varepsilon$. Il est possible de calculer explicitement $F(\varepsilon, T) = \text{dist}_{\text{hyp}}(\gamma_1(2T), \gamma_2(2T))$ grâce aux formules de trigonométrie hyperbolique (voir [2, 23]). On trouve $F(\varepsilon, T) = 2 \text{Argsh}(2 \text{sh} \frac{\varepsilon}{2} \text{ch} T)$. Si ε et T sont petits, on retrouve Thalès : $F(\varepsilon, T) \simeq 2\varepsilon$. Par contre, si $\varepsilon > 0$ est fixé et T tend vers l'infini, $F(\varepsilon, T) \simeq 2T$, comme pour un arbre (figure 29-c).

Il s'agit de l'exemple le plus simple de *sensibilité aux conditions initiales*. Si on dispose d'une connaissance précise d'une géodésique sur un intervalle $[0, T]$, il est impossible d'en déduire une connaissance précise sur l'intervalle $[T, 2T]$. Le futur semble avoir oublié le passé. C'est l'une des idées les plus importantes qui se cachent derrière le concept de *chaos déterministe*. Les géodésiques du disque sont déterministes dans le sens où elles sont entièrement déterminées par leur position et leur vitesse initiale mais elles ont un comportement qui est imprévisible en pratique [8, 25, 33, 41, 65].

9 Le disque est une courbe

Le disque unité dans \mathbf{C} est de dimension *complexe* 1 et les isométries directes $f_{\alpha,a}$ que nous avons rencontrées plus haut sont *holomorphes* en une variable complexe. Il se trouve d'une part que ces $f_{\alpha,a}$ sont les *seules* isométries directes et d'autre part que ce sont également les *seules* bijections holomorphes du disque. Ces deux assertions sont élémentaires mais importantes : vérifions-les.

Soit f une isométrie directe du disque de Poincaré. En composant f avec un $f_{\alpha,a}$ convenable, on peut supposer que f laisse l'origine fixe et que sa différentielle en ce point est l'identité. Étant une isométrie, f est aussi l'identité sur la géodésique issue de 0 avec une direction initiale quelconque v . Par conséquent, f est l'identité partout et l'isométrie initiale était bien de la forme $f_{\alpha,a}$.

Soit f une bijection holomorphe du disque. En composant f avec un $f_{\alpha,a}$ convenable, on peut supposer que f laisse l'origine fixe. Le lemme classique de Schwarz

affirme alors que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout point z du disque [3, 4, 51, 64]. En considérant l'inverse f^{-1} , on obtient qu'en fait $|f(z)| = |z|$ et que f est une rotation. La bijection holomorphe initiale était bien de la forme $f_{\alpha,a}$.

Ainsi, le disque \mathbf{D} peut être muni d'une structure métrique (orientée) et d'une structure holomorphe dont les groupes d'automorphismes coïncident. C'est pour cette raison que les relations entre géométrie hyperbolique (en dimension réelle 2) et géométrie holomorphe (en dimension complexe 1) sont si étroites.

L'omniprésence du disque de Poincaré comme espace métrique a un pendant holomorphe : il s'agit du fameux *théorème d'uniformisation*, probablement l'un des plus beaux bijoux mathématiques découverts au dix-neuvième siècle, résultat des efforts de Gauß, Riemann, Schwarz, Klein, Koebe et Poincaré.

Une *surface de Riemann* est une variété holomorphe de dimension 1. Autrement dit, il s'agit d'un espace topologique recouvert par des ouverts « de cartes » homéomorphes à des ouverts de \mathbf{C} de sorte que les changements de cartes soient holomorphes. Les surfaces de Riemann sont des « courbes » puisqu'elles sont de dimension complexe 1, mais ce sont des surfaces de dimension réelle 2. C'est cette dualité courbe-surface qui fait le sel de la théorie. La littérature sur ce sujet est immense, mais je recommande particulièrement [18, 22, 40, 48, 62], entre autres...

Une surface de Riemann est *simplement connexe* si elle est connexe et si toute courbe fermée peut être continûment déformée sur un point.

Théorème d'uniformisation. *Soit S une surface de Riemann simplement connexe. Alors, S est biholomorphiquement équivalente au plan complexe \mathbf{C} , à la sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ ou au disque de Poincaré \mathbf{D} .*

Il faut soigneusement distinguer ce théorème de son cas particulier enseigné en licence qui affirme qu'un ouvert simplement connexe du plan complexe (non vide et différent de \mathbf{C}) est biholomorphiquement équivalent au disque. Le théorème d'uniformisation traite d'une surface de Riemann abstraite qui n'est pas *a priori* plongeable dans le plan. On peut en particulier l'appliquer au revêtement universel d'une surface de Riemann quelconque, par exemple compacte (c'est-à-dire une courbe algébrique d'après Riemann). Pour une preuve, on pourra consulter par exemple [40]. Il s'agit de l'une des motivations initiales de Poincaré : une surface de Riemann compacte de genre supérieur ou égal à 2 peut être identifiée au quotient du disque par un *groupe fuchsien*, groupe discret d'isométries.

La figure 30 représente deux illustrations classiques de ce type de groupes, la seconde étant les « anges et démons » d'Escher [17, 24, 29]. À regret, je ne discuterai pas de ces groupes qui le mériteraient pourtant. Voir par exemple [24, 54, 57, 70].

Le lien entre structure holomorphe et métrique hyperbolique est résumé par le *lemme de Schwarz* exprimé de manière intrinsèque par Pick. Toute fonction holomorphe $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ contracte la distance hyperbolique : pour tout (z_1, z_2) , on a $\text{dist}_{\text{hyp}}(f(z_1), f(z_2)) \leq \text{dist}_{\text{hyp}}(z_1, z_2)$. À vrai dire, la contribution de Pick ne s'est pas limitée à exprimer le lemme de Schwarz de manière invariante. Il a résolu un

problème difficile « d'interpolation holomorphe » : si z_1, \dots, z_n et w_1, \dots, w_n sont deux n -uplets de points du disque \mathbf{D} , à quelle condition existe-t-il une application holomorphe $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ telle que $f(z_i) = w_i$ pour tout i ? La condition nécessaire et suffisante est que la matrice hermitienne de coefficients $\frac{1-w_i\bar{w}_j}{1-z_i\bar{z}_j}$ soit positive ou nulle. La nécessité de la condition n'est pas très difficile à voir mais sa suffisance est par contre bien délicate (voir par exemple [1]).



FIG. 30 – Deux groupes fuchsien

Une fonction *harmonique* sur le disque est une fonction $h : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ qui est la partie réelle d'une fonction holomorphe [3, 64, 71]. Une telle fonction est caractérisée par le fait que sa valeur en un point est la moyenne de ses valeurs sur un cercle centré en ce point. L'analogue dendrologique est une fonction réelle définie sur les sommets d'un arbre dont la valeur en chaque sommet est la moyenne arithmétique de ses valeurs sur les sommets voisins. Prenons par exemple une fonction harmonique h sur l'arbre infini A dont tous les sommets sont de valence 3. Supposons maintenant que h soit à valeurs positives. Évidemment, si un nombre positif a est la moyenne de trois nombres positifs, chacun d'entre eux est au plus égal à $3a$. En d'autres termes, si $h : A \rightarrow \mathbf{R}^+$ est harmonique et si x et y sont deux sommets voisins, on a $1/3 \leq h(x)/h(y) \leq 3$. Nous venons de démontrer la version dendrologique du *principe de Harnack* : si $h : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^+$ est harmonique, la norme hyperbolique du gradient de $\log h$ est bornée par 1.

Considérons maintenant deux points z_0 et z_1 dans le disque. Définissons $\text{dist}(z_0, z_1)$ comme la borne supérieure de $\log(h(z_0)/h(z_1))$ sur toutes les fonctions harmoniques positives h sur le disque. Évidemment, ceci définit une distance sur le disque, homogène puisque le disque est holomorphiquement homogène. D'après le théorème de caractérisation, on trouve un multiple constant du plan euclidien ou hyperbolique. Nous venons bien sûr de trouver une nouvelle incarnation de la distance de Poincaré! Le lecteur pourra le vérifier par lui-même ou bien consulter [9].

10 Arrivée au bord

Nous avons vu qu'une promenade aléatoire dans le disque se termine presque sûrement sur le bord et c'est effectivement sur ce bord que nous terminerons ce chapitre. Les points du bord du disque de Poincaré ne sont pas *dans* le disque, mais les fondateurs de la géométrie hyperbolique ont très vite pris conscience de l'importance de ce bord, qu'ils ont baptisé *absolu*. Il y a beaucoup de définitions intrinsèques de l'absolu (qui se généralisent d'ailleurs aux espaces δ -hyperboliques). La plus simple est la suivante : on considère l'ensemble des *rayons*, c'est-à-dire des plongements isométriques $\gamma : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{D}$ et on identifie deux tels rayons γ_1 et γ_2 si la distance $\text{dist}_{\text{hyp}}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ est bornée. L'espace quotient est par définition l'absolu $\partial\mathbf{D}$. Il n'est pas (trop) difficile de munir la réunion $\mathbf{D} \cup \partial\mathbf{D}$ d'une topologie qui la rend homéomorphe à un disque fermé. L'action de toute isométrie se prolonge canoniquement au bord [32].

Beaucoup de choses se passent au bord : je vais me contenter de l'illustrer en tenant une promesse faite plus haut et en plongeant naturellement le disque de Poincaré dans un espace de Hilbert. Étant donné deux points distincts u et v de $\partial\mathbf{D}$, il existe une unique géodésique orientée $\gamma \subset \mathbf{D}$ qui tend en $\mp\infty$ vers u et v . Ainsi, l'espace \mathcal{G} des couples de points distincts du bord peut être identifié à l'espace des géodésiques orientées du disque et la théorie générale des géodésiques montre que cet espace possède un volume naturel (ou plutôt une aire en dimension 2) : c'est le théorème de Liouville [6, 7]. Dans notre cas, il n'est pas difficile d'identifier cette aire. Considérons le modèle du demi-plan dans lequel le bord peut être identifié à $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Dans ces coordonnées, l'élément d'aire est $\omega = du dv / (u - v)^2$ qu'on peut aussi interpréter comme le birapport $-[u : v : u + du : v + dv]$. Si I et J sont deux intervalles disjoints du bord $\partial\mathbf{D}$ l'ensemble des couples (u, v) tels que $u \in I, v \in J$ a une aire égale au logarithme du birapport des quatre extrémités des intervalles.

Cela étant posé, on peut considérer l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathcal{G}, \omega)$ des fonctions de carré intégrable sur \mathcal{G} sur lequel agit par isométries le groupe d'isométries du disque. Si z est un point du disque on définit $\mathcal{G}_z \subset \mathcal{G}$ comme l'ensemble des couples (u, v) tels que la géodésique allant de u vers v passe à gauche de z . Remarquons que la fonction indicatrice $1_{\mathcal{G}_z}$ de \mathcal{G}_z n'est pas de carré intégrable. Cependant, si z et z' sont deux points de \mathbf{D} , la différence $1_{\mathcal{G}_z} - 1_{\mathcal{G}_{z'}}$ est de carré intégrable (exercice). La norme L^2 de $1_{\mathcal{G}_z} - 1_{\mathcal{G}_{z'}}$ est $\dots \text{dist}_{\text{hyp}}(z, z')^{1/2}$ (vérifiez, sans calculer!). Un plongement de \mathbf{D} dans H est alors évident. On choisit un point base z_0 dans le disque et on envoie le point z sur $i(z) = 1_{\mathcal{G}_z} - 1_{\mathcal{G}_{z_0}} \in H$. Il est maintenant clair que $\|i(z) - i(z')\|^2 = \text{dist}_{\text{hyp}}(z, z')$ et que i est *naturel* : toute isométrie f de \mathbf{D} définit naturellement une isométrie (affine) \bar{f} de H telle que $i \circ f = \bar{f} \circ i$.

Un inconvénient du plongement i que nous venons de construire est que l'égalité $\|i(z) - i(z')\| = \sqrt{\text{dist}_{\text{hyp}}(z, z')}$ montre en particulier que i n'est pas différentiable de sorte que i n'est pas un plongement isométrique dans le sens défini plus haut ! En 1932, Bieberbach a construit un *plongement isométrique naturel* du disque dans

un espace de Hilbert [13]. En voici une présentation moderne. On considère l'espace de Hilbert H des formes différentielles holomorphes sur le disque $\omega = f(z) dz$ qui sont de carré intégrable : $\int_{\mathbf{D}} \omega \wedge \bar{\omega} < \infty$. Si z, z' sont deux points fixés du disque, l'intégration des formes holomorphes le long d'un chemin joignant z à z' définit une forme linéaire sur H et donc, par dualité, un vecteur $V_{z,z'}$ dans H . Soit z_0 un point base dans le disque. Le plongement de Bieberbach consiste à envoyer le point z sur $j(z) = V_{z_0,z} \in H$. La naturalité de j est évidente car les bijections holomorphes du disque agissent évidemment par isométries linéaires de H . Le fait que j soit différentiable est un exercice intéressant. Un calcul élémentaire (mais pas très intéressant) montre que $\|j(z) - j(z')\| = F(\text{dist}_{\text{hyp}}(z, z'))$ où $F(t) = \sqrt{2 \log \text{ch } t}$. Au voisinage de 0, on a $F(t) \sim t$ de sorte que la différentielle de j est bien une isométrie, comme annoncé. En revanche, pour les grandes valeurs de t , la différence entre $F(t)$ et $\sqrt{2t}$ est petite et la distortion de j pour des points éloignés est donc du même ordre de grandeur que pour notre premier plongement i .

Cette propriété de plongement isométrique naturel dans un espace de Hilbert a des généralisations importantes : groupes a-T-menables, etc. (voir [10] pour en savoir beaucoup plus).

11 Quelques remords...

Notre promenade n'est pas passée par tant de lieux qui méritaient pourtant le détour !

J'aurais pu (dû ?) expliquer ce qui se fait à *l'intérieur* du disque plutôt que me limiter à une description du disque, vu de *l'extérieur*. Le disque est en effet un lieu privilégié dans lequel on *fait* de l'analyse fonctionnelle [1], de l'analyse complexe [44, 64], des systèmes dynamiques [12], de la théorie des nombres et des formes modulaires [66], sur lequel on fait agir des groupes fuchsien [54], etc.

J'aurais également dû aller plus loin. Le disque a une famille nombreuse. Bien sûr, il y a des versions en toutes dimensions (les boules hyperboliques) qui ont des propriétés analogues. De plus, en cherchant les variétés riemanniennes de dimension supérieure qui possèdent de fortes propriétés d'homogénéité, É. Cartan a fondé la théorie des *espaces symétriques* dont il a donné une magnifique classification (voir par exemple [11, 27]). Certains de ces espaces sont d'ailleurs 2-homogènes et méritent une attention toute particulière. Ces espaces symétriques ont aussi des cousins combinatoires : les *immeubles de Bruhat-Tits* dont la géométrie est également d'une richesse incroyable [19].

Et il y a les espaces qui sont les voisins du disque : les variétés à courbure négative, les espaces et les groupes δ -hyperboliques, etc. Sans oublier les espaces hyperboliques de dimension infinie sur lesquels Gromov fait le commentaire suivant dans [38, p.121] :

« These spaces look as cute and sexy to me as their finite–dimensional siblings but they have been for years shamefully neglected by geometers and algebraists alike. »¹⁴

D'autres promenades en perspective !



¹⁴Ces espaces me paraissent aussi mignons et sexys que leurs frères et sœurs de dimension finie, mais ils ont été honteusement négligés depuis des années aussi bien par les géomètres que par les algébristes.

Appendice : esquisse de preuve du théorème de caractérisation

Considérons un espace métrique homogène (X, d) qui est une surface et notons G son groupe d'isométries. Ce groupe est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, qui en fait un groupe localement compact (par le théorème d'Ascoli).

Le cinquième problème de Hilbert fut résolu au milieu du vingtième siècle par Montgomery et Zippin [56]. Dans sa forme finale, le résultat établit qu'un groupe localement compact qui possède un voisinage de l'identité sans sous-groupe non trivial est un *groupe de Lie*, c'est-à-dire que ce groupe est une variété différentiable et que la structure de groupe $G \times G \rightarrow G$ est différentiable.

Quitte à remplacer X par son revêtement universel, on peut commencer par supposer que X est homéomorphe au plan ou à la sphère (ceci utilise la classification des surfaces, qui est également un événement majeur du vingtième siècle mathématique).

J'affirme que G contient effectivement un voisinage de l'identité sans sous-groupe non trivial. Pour cela, on utilise un autre théorème difficile, dû à Kerékjártó [45, 49], selon lequel tout groupe compact d'homéomorphismes du plan ou de la sphère est conjugué à un groupe de rotations (contenu dans $O(2)$ ou $O(3)$ selon le cas, du plan ou de la sphère). Puisque $O(2)$ et $O(3)$ contiennent évidemment des voisinages de l'identité sans sous-groupe non trivial, l'affirmation en résulte.

D'après Montgomery et Zippin, le groupe G est donc un groupe de Lie que l'on peut supposer connexe. Celui-ci agit transitivement sur X de sorte qu'on peut identifier X à G/K où K est le stabilisateur d'un point, bien sûr compact, donc contenu dans $O(2)$ d'après ce qui précède.

Le groupe K peut être de dimension 0 ou 1 et G est de dimension 2 ou 3. Nous sommes donc amenés à faire la liste des groupes de Lie de dimension 2 ou 3 et dans le deuxième cas à chercher les sous-groupes compacts isomorphes à $O(2)$. Ceci n'est pas difficile. Voici la liste des résultats possibles (toujours dans le cas où X est simplement connexe).

a) G est de dimension 2 et K est trivial : l'espace X s'identifie à \mathbf{R}^2 ou au groupe affine des transformations $x \mapsto ax + b, a > 0$.

b) G est de dimension 3 et K est isomorphe à $O(2)$: le groupe G s'identifie au groupe des isométries directes de la sphère ($SO(3)$), du plan euclidien, ou du disque de Poincaré ($PSL(2, \mathbf{R})$). Dans ce cas, l'espace homogène X , s'identifie au plan euclidien, à la sphère ou au disque de Poincaré.

Si l'espace métrique est 2-homogène, le cas a) ne peut pas se produire et nous avons bien identifié, pas encore l'espace métrique, mais au moins son groupe d'isométries. Il n'est pas difficile de montrer que, sous l'hypothèse que (X, d) est géodésique, il est en fait isométrique à un multiple constant de la métrique euclidienne, elliptique ou hyperbolique. Pour conclure, il faut éliminer l'hypothèse de simple connexité de X . Ce n'est pas difficile une fois le revêtement universel identifié. Ceci termine l'esquisse de la preuve du théorème de caractérisation qui, comme on le voit, coûte cher dans le sens où elle utilise beaucoup de choses bien difficiles.

Si on ne garde que l'hypothèse d'homogénéité (en ne supposant plus la 2-homogénéité), il faut considérer également le cas a). Si $G \simeq \mathbf{R}^2$, il suffit de prendre une distance dans le plan invariante par translations, par exemple une norme quelconque. De même, on peut considérer les distances sur le groupe affine invariante par translations à gauche. Ces exemples sont bien compris et ne présentent évidemment pas la richesse du plan euclidien, de la sphère et du disque de Poincaré.

Références

- [1] AGLER, J. & MCCARTHY, J. : *Pick interpolation and Hilbert function spaces*. Graduate Studies in Mathematics, **44**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xx+308 pp.
- [2] ANDERSON, J. : *Hyperbolic geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999. x+230 pp.
- [3] AHLFORS, L. : *Conformal invariants : topics in geometric function theory*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973. ix+157 pp.
- [4] AHLFORS, L. : *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Troisième édition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. xi+331 pp.
- [5] ANOSOV, D.V. : *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **90** (1967). American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969. iv+235 pp.
- [6] ARNOLD, V. : *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Traduit du russe par Djilali Embarek. Éditions Mir, Moscou, 1976. 470 pp.
- [7] ARNOLD, V., & AVEZ, A. : *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, **9**. Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, 1967. ii+243 pp.
- [8] BARREAU, H., & NOËL, E. : *Le Hasard aujourd'hui*. Points Sciences, Seuil, 1991. 234 pp.
- [9] BEAR H.S. : Part metric and Hyperbolic metric. *The American Mathematical Monthly*, **98**, 2 (1991), pp. 109–123.
- [10] BEKKA, B., DE LA HARPE, P. & VALETTE, A. : *Kazhdan's Property T*. À paraître, prépublication 2005 disponible www.mmas.univ-metz.fr/~bekka.
- [11] BERGER, M. : *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xxiv+824 pp.
- [12] BERTELOOT, F., & MAYER, V. : *Rudiments de dynamique holomorphe*. Cours Spécialisés, **7**. Société Mathématique de France, Paris, EDP Sciences, Les Ulis, 2001. vi+160 pp.
- [13] BIEBERBACH, L. : Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. *Comm. Math. Helv.* **4** (1932), 248–255.
- [14] BLANUŠA, D. : Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume. *Monatsh. Math.* **59** (1955), 217–229.
- [15] BOLTJANSKIĬ, V. : *Hilbert's third problem*. Traduit du russe par Richard A. Silverman. Avec une préface par Albert B. J. Novikoff. Scripta Series in Mathematics. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Toronto-London, 1978. x+228 pp.
- [16] BONOLA, R. : *Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its developments*. Traduction avec des appendices par H. S. Carslaw. Supplément contenant la traduction par G. B. Halsted de « The science of absolute space » par John Bolyai et « The theory of parallels » par Nicholas Lobachevski. Dover Publications, Inc., New York, 1955. xii+268+xxx+71+50 pp.
- [17] BOOL, F. H., KIST, J. R., LOCHER, J. L., & WIERDA, F. : *M. C. Escher, his life and complete graphic work*. Harry N. Abrahms, Inc., New York, 1982.
- [18] BOST, J.-B. : *Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and abelian varieties. From number theory to physics*. (Les Houches, 1989), 64–211, Springer, Berlin, 1992.
- [19] BROWN, K. : *Buildings*. Retirage de l'original de 1989. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. viii+215 pp.
- [20] DO CARMO, M. : *Differential geometry of curves and surfaces*. Traduit du portugais. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. viii+503 pp.

- [21] CARTIER, P. : Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert. Séminaire Bourbaki, Vol. 1984/85. *Astérisque* **133-134**, (1986), 261–288.
- [22] COHN, H. : *Conformal mapping on Riemann surfaces*. Retirage de l'édition de 1967. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1980. xv+325 pp.
- [23] COXETER, H.S.M. : *Non-Euclidean geometry*. Sixième édition. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1998. xviii+336 pp.
- [24] COXETER, H.S. : *Angels and devils*. *The Mathematical Gardner*, David A. Klarner, editor, Wadsworth International, 1981 (épuisé). Republié dans : *Mathematical Recreations : A Collection in Honor of Martin Gardner*, David A. Klarner, ed., Dover Publishers, 1998.
- [25] DAHAN-DALMÉDICO, A., CHABERT, J.-L. & CHEMLA, K. : *Chaos et déterminisme*. Points Sciences, Seuil, 1992. 414 pp.
- [26] DYNKIN, E. & YUSHKEVICH, A. : *Markov processes ; Theorems and problems*. Traduit du russe par James S. Wood Plenum Press, New York, 1969. x+237 pp.
- [27] EBERLEIN, P. : *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1996. 449 pp.
- [28] EFIMOV, N. : *Géométrie supérieure*. Traduit du russe par E. Makho. Deuxième édition Mir, Moscou, 1985. 607 pp.
- [29] ESCHER, M.C. : *Official M. C. Escher Web site*, published by the M.C. Escher Foundation and Cordon Art B.V. <http://www.mcescher.com/>
- [30] EUCLIDE : *Les éléments*. Vol. 1. Édition bilingue. Traduit du grec par Georges J. Kayas. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Paris, 1978. xxxii+258 pp.
- [31] GAUSS, K. : *Werke*, volume VII, Göttingen, 1900.
- [32] GHYS, É. & DE LA HARPE, P. : *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. (Bern, 1988), 1–25, Progr. Math., **83**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [33] GLEICK, J. : *La Théorie du chaos : Vers une nouvelle science*. Champs Flammarion Sciences, 1999. 431 pp. traduit de *Chaos. Making a new science*. Penguin Books, New York, 1987. xiv+352 pp.
- [34] GROMOV, M. : Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group. Preprint SUNY (1976), reprinted in *L'Enseignement Mathématique* **46** (2000) 391–402.
- [35] GROMOV, M. : *Partial Differential Relations*. Springer-Verlag, 1986, *Ergeb. der Math.* 3. Folge, Bd. 9.
- [36] GROMOV, M. : *Hyperbolic groups*. in *Essays in Group Theory*, Mathematical Sciences Research Institute Publications 8 (1988), 75–263, Springer-Verlag.
- [37] GROMOV, M. : Sign and geometric meaning of curvature. *Rend. Semin. Mat. Fis. Milano* **61** (1991), 9–123.
- [38] GROMOV, M. : *Asymptotic invariants of infinite groups*. *Geometric group theory*. Volume 2, Proc. Symp. Sussex Univ., Brighton, July 14-19, 1991. *Lond. Math. Soc. Lecture Notes* **182**, Niblo and Roller ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge(1993), 1–295.
- [39] GROMOV, M. : Spaces and questions. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). *Geom. Funct. Anal.* (2000), Special Volume, Part I, 118–161.
- [40] GUNNING, R.C. : *Lectures on Riemann surfaces*. Princeton Mathematical Notes Princeton University Press, Princeton, N.J. 1966. iv+254 pp.
- [41] HADAMARD, J. : Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *Journ. de Math.* **5** (4), 27–73 (1898).
- [42] DE LA HARPE, P. : On Hilbert's metric for simplices. *Geometric group theory*. Vol. 1 (Sussex, 1991), 97–119, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 181, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).

- [43] HILBERT, D. : *Les fondements de la géométrie*. Traduction préparée par P. Rossier, Dunod, Paris, 1971. 311 pp. *Grundlagen der Geometrie*. Thirteenth edition. Teubner Studienbücher Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, 1987. viii+271 pp.
- [44] HOFFMAN, K. : *Banach spaces of analytic functions*. Retirage de l'original de 1962. Dover Publications, Inc., New York, 1988. viii+216 pp.
- [45] DE KERÉKJÁRTÓ, B. : Sur les groupes compacts de transformations topologiques des surfaces. *Acta Math.* **74** (1941), 129–173.
- [46] KLEIN, F. : *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*. Chelsea Publishing Co., New York, 1959. xii+326 pp.
- [47] KLEIN, F. : *Development of mathematics in the 19th century*. Avec une préface et des appendices par Robert Hermann. Traduit de l'allemand par M. Ackerman. Lie Groups : History, Frontiers and Applications, IX. Math Sci Press, Brookline, Mass., 1979. ix+630 pp.
- [48] KLEIN, F. : *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals. A supplement to the usual treatises*. Traduit de l'allemand par Frances Hardcastle Dover Publications, Inc., New York, 1963. xii+76 pp.
- [49] KOLEV, B. : Note sur les sous-groupes compacts d'homéomorphismes de la sphère. Prépublication Marseille (2005).
- [50] KOLMOGOROV, A.N., & YUSHKEVICH, A.P. : *Mathematics in the 19th Century*. Geometry, Analytic function theory. Traduit du russe, Birkhäuser Verlag, 1996.
- [51] KRANTZ, S. : *Complex analysis : The geometric viewpoint*. The Carus Mathematical Monograph **23**, The Mathematical Association of America, 1990.
- [52] KUIPER, N. : On C^1 -isometric imbeddings I and II, *Indag. Math.* **17** (1955) 545–556 et 683–689.
- [53] LÉVY, P. : *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Retirage de la seconde édition (1955). Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992. iv+437 pp.
- [54] MAGNUS, W. : *Noneuclidean Tessellations and Their Groups*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 61. Academic Press, New York-London, 1974. xiv+207 pp.
- [55] MCLACHLAN, R. : A gallery of constant-negative-curvature surfaces, *Mathematical Intelligencer*, (1994), 31–37.
- [56] MONTGOMERY, D. & ZIPPIN, L. : *Topological transformation groups*. Interscience Publishers, New York-London, 1955. xi+282 pp.
- [57] MUMFORD, D. , SERIES, C. & WRIGHT, D. : *Indra's pearls. The vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, New York, 2002. xx+396 pp.
- [58] NECHAEV, S. & VOITURIEZ, R. : On the plant leaf's boundary, "jupe à godets" and conformal embeddings. *J. Phys. A* **34** (2001), no. 49, 11069–11082.
- [59] POINCARÉ, H. : Théorie des groupes fuchsien, *Acta Mathematica*, **1**(1882), 1-62. *Œuvres*, tome II, 108-168. Sur les fonctions fuchsien, *Acta Mathematica*, **1**(1882), 193-294. *Œuvres*, tome II, 169-257.
- [60] POINCARÉ, H. : *La Science et l'hypothèse*. Paris, Flammarion, 1902. 284 pp.
- [61] POPOV, E. : Geometric approach to Chebyshev net generation along an arbitrary surface represented by NURBS, <http://graphicon2002.unn.ru/demo/2002/>
- [62] REYSSAT, E. : *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Progress in Mathematics, **77**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989. viii+166 pp.
- [63] RUCKER, R. : *The Fourth Dimension : A Guided Tour of the Higher Universes*. Houghton Mifflin, 1984.
- [64] RUDIN, W. : *Analyse réelle et complexe*. Traduit de la première édition anglaise par N. Dhombres et F. Hoffman. Masson, Paris, 1980. x+397 pp.

- [65] RUELLE, D. : *Hasard et chaos*. Odile Jacob, 2000.
- [66] SERRE, J.-P. : *Cours d'arithmétique*. Collection SUP : « Le Mathématicien » **2**, Presses Universitaires de France, Paris, 1970. 188 pp.
- [67] TADA0, I. : *Hyperbolic non Euclidean world and figure-8 knot* : www1.kcn.ne.jp/~iitto/
- [68] TCHEBYCHEV, P.L. : Sur la coupe des vêtements (1878), *Œuvres II*, Chelsea 1962.
- [69] The institute for figuring : www.theiff.org/
- [70] THURSTON, W : *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1.* (ed. Silvio Levy). Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [71] TSUJI, M. : *Potential theory in modern function theory*. Retirage de l'original de 1959. Chelsea Publishing Co., New York, 1975. x+590 pp.



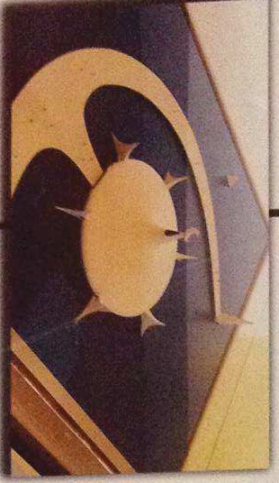
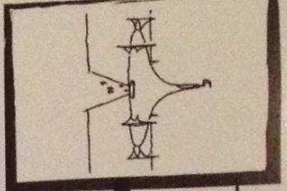
Merci à Aurélien Alvarez, Éric Charpentier, Pierre de la Harpe, Annick Lesne, Yann Ollivier, Martine Rufin et Bruno Sévenec pour leurs lectures détaillées de ce texte ainsi que pour leurs bons conseils.

ÉTIENNE GHYS

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
de l'École normale supérieure de Lyon
U.M.R. 5669 du CNRS
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07- France
ghys@umpa.ens-lyon.fr

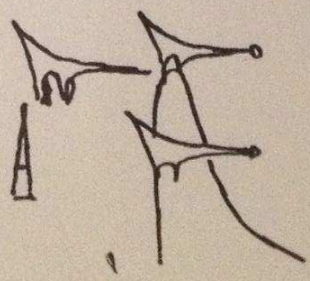
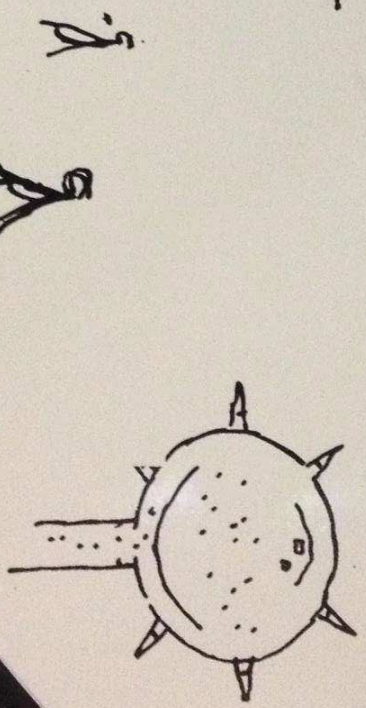
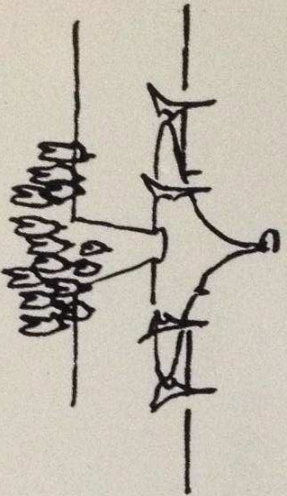
23 septembre 2005

La Mosquée d'Alger



2

« Une nuit à Alger, en 1968, alors que je m'apprétais à m'endormir, me vint l'idée de dessiner une mosquée. J'ai travaillé, un peu comme dans un état second, une partie de la nuit, au petit matin : une mosquée suspendue au-dessus de la mer et reliée à la terre ferme par une superstructure, à côté d'une plage, à proximité du Port d'Alger. Bonne médiane, en voyant les plans de la mosquée, s'était exclamé : « Mais c'est une mosquée révolutionnaire. » Je lui ai alors répondu, en riant : « Président, la révolution ne doit jamais s'arrêter, elle doit être partout »



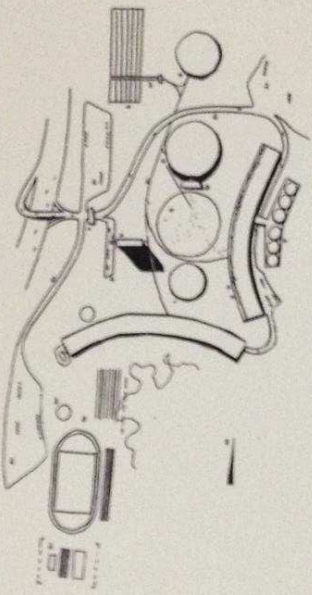
L'université de Constantine



3

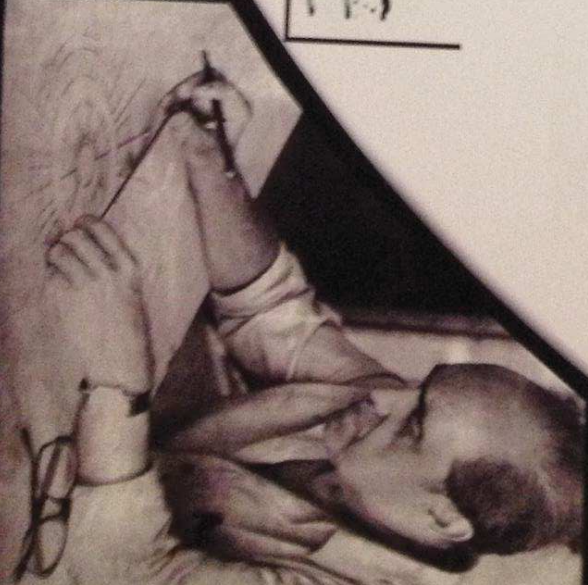
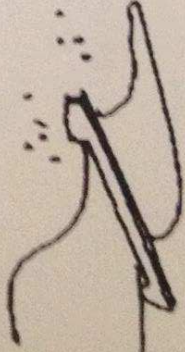
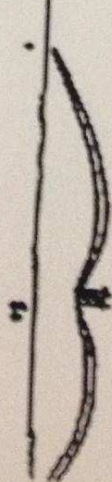
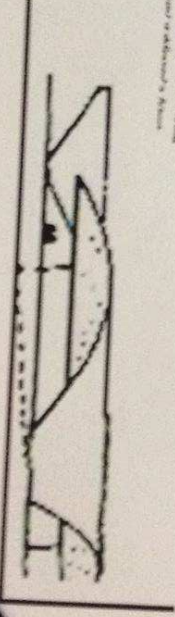
Quand on m'a convoqué pour étudier le projet de l'université de Constantine, j'ai été surpris devant le programme que l'on voulait réaliser. C'était la vieille université rétrograde et dépassée, avec des dizaines d'immeubles comme si les temps actuels ne suggéraient pas une université différente, intégrée comme l'on dit.

J'ai refusé de continuer le programme et ... j'ai décidé de le réaliser selon mes convictions...



1. Plan de l'édifice principal de l'université de Constantine.

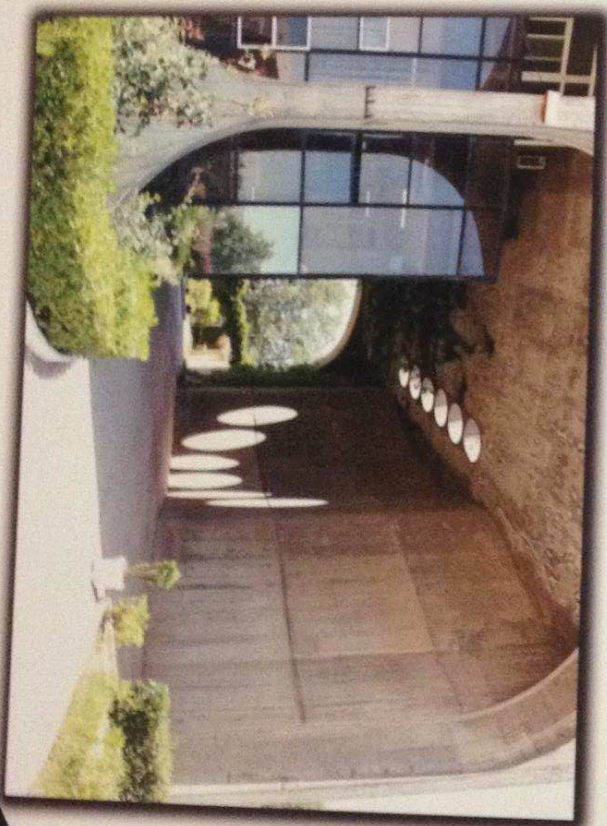
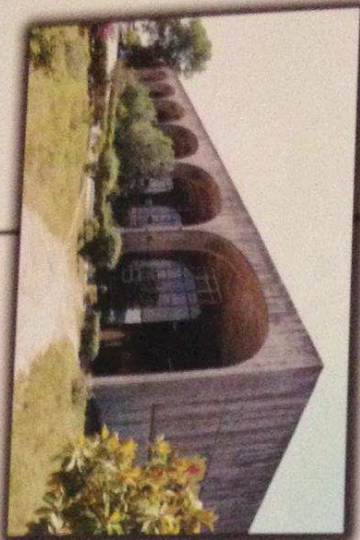
2. Plan de l'édifice principal de l'université de Constantine.



L'université Houari Boumediène Alger

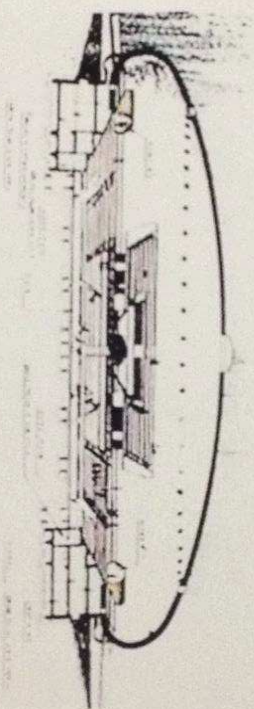


« Quand Boumediène avait demandé à Oscar Niemeyer de dessiner une université, celui-ci lui avait sobrement répondu : « On ne dessine pas une université, on la pense » ...
Malheureusement, aujourd'hui, il n'y a plus la même conception de « penser ». FAIDI Halim



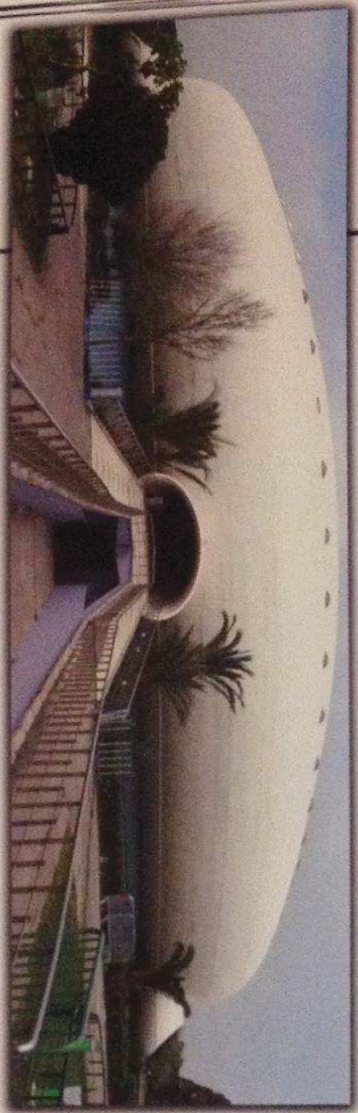
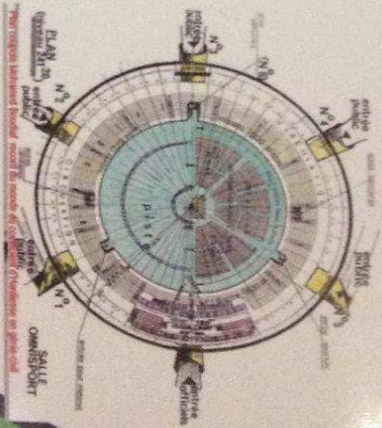
Le complexe du 5 juillet à ALGER

La coupole, les vestiaires, le restaurant
 du complexe du 5 juillet ont été dessinés
 par Oscar Niemeyer...



Coupe E-O

SALLE
 OMNISPORT



5

